様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 １３ 日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５２３２

研究課題名（和文）複数種の波を持つ時間依存型境界値逆問題の展開

研究課題名（英文）Study on boundary inverse problems for time dependent problems with different kinds of waves

研究代表者
川下　美潮（Kawashita, Mishio）

広島大学・理学研究科・教授

研究者番号：８０２１４６３３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：複数種類の波が現れる波動現象の中で最も基本的な設定である平坦な接合境界を持つ媒質を考える。接合境界上部のある部分から波を発射、反射波を観測し下部にある未知の介在物を推定するという逆問題をレゾルベントの漸近解析を通じて調べた。上側の伝播速度が下側よりも遅い場合は、介在物による反射波が接合境界で屈折するだけで、介在物と観測データを取る集合との光学的距離（任意の点から別の任意の点に到る波が進むためにかかる時間の最小値）が得られた。逆の場合は、屈折現象に加え全反射現象が起こるので、2点を結ぶ光学的距離は変わるが、この場合も通常の屈折波の場合が最短となり、全反射が起きない場合と同様の結論が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
この問題はいわゆるレーダー探査問題の原型で、それを数学として何処まで定式化可能かについてある程度の解答を与えたものと考えられる。但し、指数減衰する関数を使用するため、実用については未知で、数値計算に限っても課題が残る。数学的な観点からは、完全に正しいことが保証され、先行研究を見ればこの結果を元により詳しい情報も導き出せる可能性が予想される。研究手法は主にレゾルベントの漸近挙動の解析に帰着し、「最短の距離（本研究では時間）」を得ることになる。この解析は1960年代から盛んに研究さている熱方程式の短時間漸近挙動と密接な関連があり、見た目は異なるこれらの問題の関連が明らかになった点にも意義がある。

研究成果の概要（英文）： A medium with the flat transmission boundary which is the most fundamental setup in the wave motion phenomena in which several kinds of waves appear is considered. The inverse problem of estimating the unknown inclusions in the lower part of the transmission boundary by observing reflected waves for incident waves from the upper part is investigated through the asymptotic analysis of a resorvent. When propagation speed in the upper part is slower than that in the lower part, the reflective wave by inclusions is only refracted in the transmission boundary. Hence, the optical distance between inclusions and the set which takes observational data is obtained.
In the opposite case, the total reflection phenomena occur. According to these phenomena, the optical distance for two points may change, but the case of the usual refraction wave becomes the shortest also in this case. Hence, the same conclusion as the case where total reflection phenomena do not occur is obtained.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：時間依存型逆問題　複数種の波　囲い込み法　空洞推定　介在物推定　光学的距離　接合境界条件　二層問題

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

微分方程式論における重要な問題は多岐にわたり、数学的な研究対象に止まらず、工学などの応用面から要請される問題も多い。その中で特に数学的厳密性を兼ね備えた研究方法が要求されるものの一つとして逆問題がある。ただし、ここでいう逆問題とは熱伝導現象、波動現象やそれらの定常状態など微分方程式を用いて記述されるものを指す。

本研究開始前に、本研究代表者は M. Ikehata により導入された「囲い込み法(enclosure method)」を用いて熱方程式に対する境界値逆問題について考察を行ってきた。「境界値逆問題」とは、一般に、既知である外部の境界上における観測データから内部の情報（例えば内部にある空洞の形など）を得る方法について考察するという問題のことを指す。境界値逆問題に限らず、微分方程式の逆問題における研究テーマは主に次の３つに分けられる。

一意性：内部の構造が観測データから一意に決まるかどうかについて調べること。
安定性：観測データが近いときは内部の状態も近い、すなわち、似た状態になっているかどうかについて調べること。
再構成：内部の様子、例えば空洞や介在物(内部に入っている異質な物質のこと、inclusion ともいう)の位置や形状について具体的に知る手順を与えること。

これまで本研究代表者が行ってきた「囲い込み法」による逆問題の研究は、上記区分の「再構成」に分類される。この再構成について、本研究代表者は、上述の通り、熱方程式に対する境界値逆問題に分類される逆問題の考察を行ってきた。この問題は元々時間依存問題であるが、時間を含むままで扱うよりも、時間変数に対して Laplace 変換を行って得られるパラメータ付きの楕円型境界値問題を用いて元の問題を書き直した上で取り扱う方が良いことが明らかになった。このパラメータ付き境界値問題の解作用素（解から定まる作用素のこと）を「レゾルベント」と呼ぶ。

ここで「レゾルベント」という用語について説明を加えておく。通常は方程式自身の非斉次データに対する解のことをレゾルベントと呼ぶが、この研究では方程式自身は斉次方程式で、境界上においてのみデータを与えたときの解も考えることが多い。本質的にはこれらは同義であると考えられるので、この報告書では敢えてどちらもレゾルベントという同じ言葉遣いでそれらを表すことにする。

上述の熱方程式に対する境界値逆問題に関する研究の結果、熱方程式のままで扱うより、レゾルベントにおけるスペクトルパラメータを大きくするときの漸近挙動の解析に帰着させる方が良いことがわかってきた。もとは空洞のみがある場合について考えられていたが、後に介在物の場合も同じ方法が有効であることが分かってきた。レゾルベントの漸近挙動は熱方程式の短時間漸近挙動と関係があることは 1960 年代から多くの研究者によって考えられてきた歴史がある。このように、熱方程式の短時間漸近挙動やレゾルベントの漸近挙動と熱方程式の境界値逆問題との間には意外な関係があることが分かってきた。

熱方程式だけではなく、媒質内部に空洞がある領域を伝わる通常の波動方程式の場合も、これまで本研究代表者らが研究してきたポテンシャル論を用いたレゾルベントの評価を丹念に行うという手法は有効であることは直ぐに分かる。通常のスカラー値関数に対する波動方程式においても熱方程式の場合と同様、外部境界の外にある点を任意に選び固定したとき、その点と内部の境界上の点と外部の境界上の点とを結んでできる折れ線の長さの最小値が求まることが得られた。この結果は一次元空間の時の問題設定の直接的な拡張に対応しており、1 回観測（観測データを取る回数を一回のみとする事を指す）における結果としては当時（現時点においても）最良に近いものと思われる。また、研究が浅い頃は、内部の空洞は狭い意味で凸なものが一つのみという限定されたときに限り有効であったが、その後の研究で、内部が有限個の互いに交わらない狭い意味で凸な空洞のみを含んでいるときにも適用可能であることまでは明らかになっていた。

上記は媒質を伝わる波が 1 種類のみのため比較的構造は単純である。しかし、現実に近い設定、例えば異質な媒質がある場合を考えると、伝播速度の違いから屈折現象を起こすため、複数種類の波が現れることになる。このようなより現実に近い設定の元で、これまで研究代表者らが開発してきた研究手法がどれくらい有効かについて調べるという課題に取り組むのはこれまでの研究の流れを踏まえれば自然である。このような背景・経緯を経て、本研究が計画された。

２．研究の目的

本報告における研究課題の目標は、これまで扱ってこなかったより複雑な設定において、これまでに本研究代表者が行ってきた逆問題に対する研究方法がどの程度有効で、さらに、この方法を用いると何が得られるかということについて調べることにあった。これまでの研究対象は主に熱方程式であったが、研究手法の本質はレゾルベントの解析にあり、波動方程式に対しても有効である。そこで、本研究代表者らが熱方程式の境界値逆問題に対して行ったレゾルベントの漸近解析を援用した「囲い込み法」による考察が、これらの逆問題に対してどれくらい有効であるか、適用限界はどこにあるか、さらに適用限界が生じる理由について調べることが主要な目的となった。

速度の異なる複数種類の波が存在する媒質内における空洞や波の発生源をとらえる逆問題は双曲型方程式に対する境界値逆問題や波源推定問題として定式化される。本研究の目標である複数種類の波が存在する場合の解析については、これらの問題を直接扱うのではなく、より原始的な反射波を用いた介在物や空洞の推定問題、すなわち、ある場所から波を発射し、反射してくる波を観測することにより、介在物や空洞を推定するという問題を扱う。この場合でも、元の媒質には複数種類の波が存在する場合を考える。このような複数種の波が現れる場合としては次のような状況が考えられる。

（1）2 層媒質問題など媒質が接合していることにより全体では複数種の波が現れる。

（2）弾性方程式などのように、媒質内に元々から複数種類の波が混在している。

上記の様な複雑な逆問題でも、適切な設定の元ではレゾルベントの漸近挙動に対する解析が有効なことを明らかすることを主要な目的として研究に取り組んだ。

設定を波動方程式（波の伝播を表す方程式）に関する問題とした理由としては、上記のより複雑な問題設定は波動方程式などの双曲型方程式においてより顕著に表れることにある。これまでの研究は主に、元の時間依存問題は単独方程式の場合を扱っていた。この場合、波は 1 種類しかないので、比較的構造が単純である。しかし、元の時間依存問題が弾性方程式などの微分方程式系のときは伝播速度が異なる複数種類の波が媒質上に混在して伝わっている。また、各媒質上では通常のスカラー値関数に対する波動方程式であっても、2 種類の異なる媒質が接合されてできた 2 相媒質問題を考えると、全体の系は伝播速度が異なる複数種類の波を含むことになる。これらの場合はレゾルベントの構造が単独方程式の場合に較べると遙かに複雑なため、これまでの研究成果の単純な応用とはならず、新たな問題が現れることが予想される。さらに、これらの方程式は波動現象としては基本的な問題であり、これまでに本研究代表者が行った研究に引き続き取り組むのが自然と思われる問題である。この研究課題の目指すところは、上記の目標に加え、この研究課題を実行することにより時間依存問題に対する各種逆問題についての理解をより深めることにある。

３．研究の方法

本研究課題を要約すると複数種類の波が現れる波動現象における、反射波を用いた介在物・空洞推定逆問題をレゾルベントの漸近解析を通じて調べることにあった。まずは複数種類の波が存在する状況を次のように分類する。

(A) 2 層媒質問題のように、接合境界面があることにより異なる伝播速度を持つ波が現れる。

(B) 弾性方程式のように元々から伝播速度が異なる波が混在して伝わっている。

上記(A)、(B)それぞれの状況に応じて、逆問題の設定は様々である。(B)は解の構造が複雑なのと、これまでの研究より最短の長さ（この場合は最短の到達時間）が得られるので、最終的な結論は通常の波動方程式と同様になることが予想される。そのため、主に(A)に関して調べることにした。

(A)の考察に当たり、本研究開始前に本研究代表者らが考察した境界値逆問題の解析について振り返る。一般に、微分方程式に対する逆問題では、例えば、空洞や介在物などが存在するなどの先見情報を仮定する。但し、それらの場所や形は分からないなどと仮定する。この未知な部分を観測データからどのようにして導くかを考察するのがこの逆問題の数学的な定式化である。上記未知情報を引き出すためには、いわゆる双対形式を利用して定められた「指示関数」と呼ばれる関数を導入する。この「指示関数」から如何にして空洞や介在物までの距離などの幾何学的な量を取り出すことができるかについて調べることが問題の本質になる。

以前研究していた熱方程式に対する境界値逆問題では、観測データとしては境界におけるある時間（観測時間を指す）までの解の情報が得られたと仮定する。このデータから、元の時間依存問題の解に対して Laplace 変換の時間についての積分をこの時間までで打ち切った積分を行う。指示関数はこの積分が含まれるように定義する。この積分された関数は定常問題のレゾルベント（これは元の解の Laplace 変換によって得られるものである）で近似され、その誤差項は指数減衰することが示される。よって、元の指示関数における上の積分された関数からなる項をレゾルベントに置き換えたものが指示関数の主要項となる。このように定めることにより、指示関数から情報を引き出すためには、レゾルベントやその積分核である基本解の漸近挙動を調べれば良いことになり、これらの漸近挙動の解析から空洞や介在物についての位置に関する情報が得られることになる。これまでの代表者らによる研究で、熱方程式の境界値逆問題に対しては、「最初に内部の境界にぶつかる点までの最短の長さ」を計測しているという解釈が成り立つことが明らかになっていた。

本研究においては、上記の境界値逆問題と類似の波動伝播に関する問題として、先見情報として接合境界面は平坦で、その下側においてのみ未知の空洞、もしくは介在物だけがあることが分かっているという状況に限って、下記を考察することにした。

① 2 層媒質の接合境界面の上側のある点（の近傍）から発した信号を、境界面の上側のある点（の近傍）で観測して得られるデータから下側の空洞の情報を得る。

この場合、正確に言えば、境界条件が観測データを得る場所にはないので、厳密に言えば境界値逆問題とは言えない。この場合は、観測データを得る場所における真の解と接合境界面の下側には何もないと仮定したときの解の Laplace 変換の差から指示関数を導入する。指示関数のこの導入方法は境界値逆問題の場合と類似の発想であり、その意味では、上記①で扱う問題も

境界値逆問題と考えても構わないと思われる。今回は、観測データを得るために波を発射する場所と、反射波を計測する場所は同じであるとして研究を進めた。

以下、①の問題において、先見情報として、空洞はなし、介在物内部の伝播速度は何処でも外部媒質の伝播速度より速いか遅いかのいずれか（単調性条件(monotonicity condition)と呼ばれる）を仮定する。この場合は双対形式に対して楕円型評価を用いることにより、接合境界のみで介在物がない場合の基本解に対する介在物の上での漸近挙動を調べることに帰着される。本題は、この基本解を求め、下側にある介在物上における漸近挙動を求めることにある。

４．研究成果

(1) 上に述べた通り、最初に基本解を求めなければならないが、これについては多くの方法があると思われる。しかし、最終目標は基本解の漸近挙動を求めることにあり、この解析が実行できるような方法で求めておく必要がある。接合境界があるため、接合境界面と垂直な方向において境界面上側と下側で関数の形が異なる。この事実が問題を複雑にする数学的な原因の一つで、その処理が問題になった。この部分は例えば、Hankel 変換を用いても良いと思われるが、本研究においては部分 Fourier 変換を用いる素朴な方法を採用した。基本解が指数減衰するため、その部分を正確に取り出すことが必要になってくるが、これが大きな問題の一つである。これを解決するために、半空間における Helmholtz 方程式に対する境界値問題の Poisson 作用素の積分核を求める手法を援用することを考察した。この方法で得られた解は Laplace 積分の形により与えられる。全反射現象が起きない場合は双曲線上の Laplace 積分となるが、全反射現象が起こる場合はこれらの双曲線を被積分関数の分枝が横切るため、その分枝を迂回してつなぐ部分が積分項に加わることになる（詳細は(3)で述べる）。この結論は複雑そうであるが、それを導くために本研究で用いた方法は素朴な解析を組み合わせることからなっており、これがこの研究で展開した方法の利点である。さらに、解の積分表示を見れば、波のどの部分が積分のどの部分と対応するかが分かりやすいという利点もある。基本解の漸近挙動を得るには、最終的には Laplace 積分の漸近挙動を求める際に用いられる Laplace 法を用いることにより得られる。

(2)接合境界面の上側の伝播速度が下側の伝播速度より遅い場合は、下側から波が入射した場合に全反射現象が起きない。これは数学的には(1)で基本解を表示する積分の積分路が単なる双曲線で与えられることに対応する。この場合は通常の Laplace 法により解の漸近挙動を求めることができ、「観測データを取る場所から出発して、接合面下部の境界にぶつかる点に到達するまでにかかる時間のうち最短なもの」が得られることになる。Laplace 法によれば、出発点と到達点を決めたとき、この出発点から発射された波が、この到達点に到達するまでにかかる時間（「光学的距離」と呼ばれる）が求められ、その経路は接合境界において、Snell の法則に従っていることが導かれる。そのため、指示関数から得られる量は、観測データを取る場所の点と介在物の上の点の光学的距離のうち最小なものになる。この最短時間をこの 2 つの集合間の「光学的距離」と呼ぶ。接合条件がない場合は先行研究で 2 点間の通常の距離（伝播速度が１のとき）が求まるので、ここで得られた結果は、接合境界がない場合の拡張になっていることが分かる。

(3)(2)で考察しなかった場合、すなわち、接合境界面の上側の伝播速度が下側の伝播速度より速い場合は、下側から波が入射したとき、入射角の大きさに応じて全反射現象が起きることがある。この場合、(1)で述べたように基本解を与える積分の積分路は(2)の時のような単純な双曲線にはならない。この積分路を得るためには、もとの積分路である実軸から、積分路の変更を行うが、被積分関数は分枝を持っている。分枝にはそれを与えるための切断線がある（今の場合は虚軸のある点から上側に当たる）。この切断線を避けるように積分路を変更する必要がある。全反射現象が起こらない入射角の場合は、分枝の切断線が双曲線を横切らないので、(2)の場合と同様になる。一方、全反射現象が起きる場合は、この双曲線が上記の分枝の切断線を横切るため、それをつなぐための迂回路が必要になる。この迂回路に対応する積分が表す波が表面波(evanescent waves)と呼ばれるものである。表面波の部分は被積分関数に特異性があり、そのため、(2)の場合のような完全な漸近展開公式は得られない。また、表面波がある場合は、接合境界の下側の点から上側の点に進む波の経路としては、通常の経路の他に、接合境界で全反射を起こし、表面波として境界面上を進んだ上、境界面上から上側の点に進む経路も存在することになる。これらの到達時間を比べると、表面波を含む経路の方がより短くなることが示された。この事実は、恐らく始めて明らかにされた内容と思われる。

(4)全反射現象を考慮しなくてはいけない場合（すなわち、接合境界面の上側の伝播速度が下側の伝播速度より速い場合）についても、(3)の結論を用いることにより指示関数から(2)で述べた光学的距離が得られることが示すことができた。(3)で述べたように、全反射現象を起こす場合には、通常の経路よりも到達時間が短くなる経路があることが分かっている。そのため、すべての経路のうち、最短の場合を求めるためにはさらなる議論が必要になる。直感的に考えれば、接合境界の上側と下側を結ぶ経路は必ず存在するので、全反射現象をおこす臨界となる角度の場合の経路より、この経路の方が短くなるはずである。そのため、結論としては全反射現象の影響は現れないことが考えられる。

この予想は、実際、上記の経路の長さを評価することにより確認された。そのため、全反射現象が関わる部分については正確な漸近挙動を求める必要はなく、解の評価さえ得られれば十

分であることが期待される。このことが実際に正しいことが本研究により数学的に導くことができた。そのため、全反射現象がある場合でも、光学的距離を与える場合は、全反射現象を起こさない入射角の場合なので(2)の解析が援用できることになる。このようにして、全反射現象が絡む場合も、(2)の全反射現象が起きない場合と同様の結論となることが分かった。この研究で得た結論は、思考を進めるうちに直感的には十分に予想できる類いのことではあるが、この研究によりなぜその予想が正しいのかが正確に説明できた。
(5)本研究課題の前に行った熱方程式に関する境界値逆問題の解析では、「観測データがある境界から出発して、最初に介在物などの内部の境界にぶつかる点までの最短の長さ」を計測しているという解釈が成り立つことが明らかになっていた。今回の研究は、複数種の波がある場合でも上記と同様の解釈が成り立つことを明らかにすることが目標であった。これについて、結論としては「接合境界面の上側にある観測データを取る場所から出発して、接合境界面を通り、最初に接合境界面の下側にある介在物などがある場所に到達するためにかかる時間の最小値」が得られることが分かった。このように、最短の「距離」ではなく、「時間」で見れば、これまでと同様の結論になることが明らかになった。この意味で、時間依存型逆問題に対して、レゾルベントの解析に帰着されるように指示関数を選ぶという定式化においては、「最短の時間（距離)」を計測しているという解釈は依然として正しいことが明らかになった。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① M. Ikehata and M. Kawashita, On finding a buried obstacle in a layered medium via the time domain enclosure method, Inverse Problems and Imaging, 査読あり,12, No.5, (2018), pp.1173-1198.
② M. Ikehata and M. Kawashita, Asymptotic behavior of the solutions for the Laplace equation with a large spectral parameter and the inhomogeneous Robin type conditions, Osaka Journal of Mathematics, 査読あり, 55, (2018), pp.117-163.
③ M. Kawashita, Sufficient conditions for decay estimates of the local energy and a behavior of the total energy of dissipative wave equations in exterior domains, Hokkaido Mathematical Journal, 査読あり, 46, No.3,(2017), pp.277-313.

〔学会発表〕（計 12 件）

① 川下美潮　囲い込み法による平坦な接合境界の下側にある介在物の検出について I Okayama Workshop on Partial Differential Equations 2018 年 10 月 20 日 岡山大学
② 川下美潮　囲い込み法による平坦な接合境界の下側にある介在物の検出について II Okayama Workshop on Partial Differential Equations 2018 年 10 月 20 日 岡山大学
③ 川下美潮　The enclosure method for the time dependent problems and the shortest lengths, International Workshop on Inverse Problems for Partial Differential Equations, September 10, 2018, School of Mathematics, Southeast University, China.
④ 川下美潮　Finding obstacles in a two-layered medium by the enclosure method, Inverse Problems for Partial Differential Equations, August 28, 2018, Tokyo University of Science (Kagurazaka Campus), Japan.
⑤ 川下美潮　囲い込み法による平坦な接合境界面の下側にある異物検出、保存則をもつ偏微分方程式の解の正則性，特異性および漸近挙動の研究、2018 年 5 月 31 日、京都大学数理解析研究所
⑥ 川下美潮　囲い込み法による接合境界面の下側にある異物検出について　松山解析セミナー 2018　2018 年 2 月 3 日　愛媛大学
⑦ 川下美潮　平坦な接合境界面を持つ媒質を伝わる波を用いた介在物推定問題の囲い込み法による解析について　『応用解析』研究会　2017 年 7 月 1 日　早稲田大学
⑧ 川下美潮　レゾルベントと囲い込み法による逆問題　岐阜数理科学セミナー　2017 年 5 月 26 日　岐阜大学
⑨ 川下美潮　消散型波動方程式の局所エネルギー　現象解析特別セミナー第 11 回　平成 29 年(2017 年)3 月 16 日　茨城大学
⑩ 川下美潮　Asymptotics of the function corresponding to refracted waves for the flat transmission boundary and the enclosure method　RIMS Workshop on Inverse problems for partial differential equations and related areas　平成 29 年（2017 年）1 月 26 日　京都大学数理解析研究所
⑪ 川下美潮　Decaying properties of the total and local energies for the wave equations with dissipations　Séminaire d'analyse, Université de Nantes 平成 28 年（2016 年）10 月 7 日 Universite de Nantes, France

⑫ 川下美潮　Decaying properties of the total and local energies for the wave equations with dissipations The 7 th Pacific RIM Conference on Mathematics 2016 平成 28 年（2016 年）7 月 28 日 Seoul National University, Korea