

令和 4 年 4 月 14 日現在

機関番号：17201

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2021

課題番号：16K05236

研究課題名（和文）楕円型偏微分方程式の非対称解

研究課題名（英文）Asymmetric solutions of elliptic partial differential equations

研究代表者

梶木屋 龍治 (Kajikiya, Ryuji)

佐賀大学・理工学部・教授

研究者番号：10183261

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：1. ディリクレ境界条件のもとで、 p ラプラス偏微分方程式を考察した。非線形項に対する従来よりも、かなり弱い条件の下で、0に収束する解の列の存在を証明した。さらに零解が解全体の集合の中で集積点になる場合と孤立点になる場合についての非線形項の条件を調べた。
2. 球において、 p ラプラス方程式をディリクレ境界条件の下で研究した。非線形項の係数関数が球対称であり、球面の十分小さな近傍で正であり、それ以外では負となる場合を研究している。このとき、レイリー商を最小にする解を最小エネルギー解と呼ぶ。最小エネルギー解は、球対称でない正值解になることを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

この研究は、数学や物理学、工学などにおいて非常に重要な偏微分方程式である楕円型偏微分方程式の解の性質を調べるものである。解を無限に多くもつ楕円型偏微分方程式の研究は、今までにも行われてきた。本研究では、極めて弱い仮定のもとに解の無限個の存在を証明している。
また、方程式が対称性をもつにもかかわらず、解が非対称になることが起きる。このような対称性の崩れは、解の分岐理論にも密接に関係していて、非対称解の研究は、楕円型偏微分方程式論において極めて重要である。

研究成果の概要（英文）：We study the p -Laplace equation on the Dirichlet boundary condition. Under a very weak condition on the nonlinear term, we prove the existence of a sequence of solutions which converges to the zero solution. For some elliptic equations with parameters, we decide whether the zero solution is an accumulation point or an isolated point in the set of all solutions.

We study the p -Laplace Emden-Fowler equation with a radial and sign-changing weight in the unit ball under the Dirichlet boundary condition. We show that if the weight function is negative in the unit ball except for a small neighborhood of the boundary and positive at somewhere in this neighborhood, then no least energy solution is radially symmetric. Here a least energy solution is defined by the minimizer of the Rayleigh quotient.

研究分野：非線形楕円型偏微分方程式

キーワード：楕円型偏微分方程式 変分法 境界値問題 対称解

1. 研究開始当初の背景

ある種の楕円型偏微分方程式では、0 に収束する解の列が存在することが知られている。すなわち零解が解の集積点になる場合である。2005 年の自分自身の研究においてもその研究を行っている。そのときに与えた非線形項に対する仮定を最近、見直しているときに、その仮定をさらに弱めることができるのではないかと気づいた。この方向で研究を進めることにした。また、Henon 方程式を含むいくつかの楕円型偏微分方程式では、方程式が対称性を持つにもかかわらず、非対称な解が存在することが知られている。そのような解は、レイリー商の最小化問題の解(最小エネルギー解)として現れる。エネルギーを最小にする解なので、放物型方程式の定常解としての研究意義は大きい。これらの解の性質を調べることは非常に重要なことである。

2. 研究の目的

零解に収束する解の列が存在するような楕円型偏微分方程式の非線形項に対する仮定を従来知られているものよりも弱めて、必要十分条件に近づけることを目的とする。さらに、零解が孤立する場合の非線形項に対する十分条件を与える。それらを応用して、いくつかの楕円型偏微分方程式に対して、零解が解空間の中の集積点になるか、それとも孤立点になるかを判定することを目的とする。

解の対称性と非対称性の研究も行う。最小エネルギー解は、エネルギーが最小になっているために、放物型方程式の定常解として、他の定常解に比べて、より安定した定常解と考えられる。従って、最小エネルギー解の性質を研究することは、数学的に非常に重要である。これをもう一つの研究目的とする。

3. 研究の方法

本研究を推進するには、様々な資料と数学的道具が必要となる。まず、多くの論文、専門書、数学雑誌、プレプリントなどの参考資料を収集する。次にこれらを分析、整理し、内容を完全に理解して研究の基盤とする。また、収集した資料は、パソコン内にデジタルデータとして保存し、いつでも参照できるようにする。これらの準備のもとに、問題を分析し考察を行う。N 次元空間の楕円型偏微分方程式ではなく、空間 1 次元として、2 回常微分方程式に限定し、コンピュータによる数値シミュレーションの助けを借りて、解が零解に収束する様子を調べる。これらの準備のもとに、私が 2005 年に発表した symmetric mountain pass lemma を用いて、零解に収束する解の列の存在を証明する。研究成果が得られた後で他の研究者との討論を行い、国内外の多くの研究集会に出席し、研究結果を発表する。またそこで、新しい情報を入手し研究の発展に役立てる。また、最小エネルギー解の研究も数値シミュレーションの助けを借りて行う。現在までに知られている結果と予想できる結果を比較し、解の性質を考察する。これにより、最小エネルギー解が非対称であることを証明する。

4. 研究成果

1. 零解に収束する解の列が存在するような楕円型偏微分方程式を考える。これが成り立つような偏微分方程式の非線形項に対する仮定を従来知られているものよりも、極端に弱めることができた。いくつかの楕円型偏微分方程式に対して、適切に入れたパラメーターを利用し、パラメーターが変化するとき、零解が解空間の集積点になるか、孤立点になるかを判定した。

2. 球において、 p ラプラス方程式をディリクレ境界条件の下で研究した。非線形項の係数関数が球対称であり、球面の十分小さな近傍で正であり、それ以外では負となる場合を研究した。このとき、レイリー商を最小にする解を最小エネルギー解と呼ぶ。最小エネルギー解は、球対称でない正值解になることを証明した。その結果、球対称な正值解と球対称でない正值解の両方が存在する事を証明した。

3. (p, q) ラプラス方程式に対して、非線形項の適切な仮定の下に、無限大に発散する解の列の存在を証明した。また、零解に収束する解の列の存在を証明した。これらは、2005 年に私が発表した symmetric mountain pass lemma を用いて証明された。

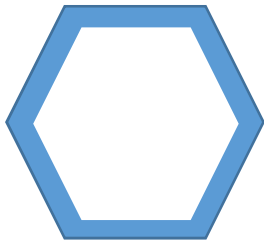
4. 主要部が 1 次元 (p, q) ラプラス方程式であり、非線形項が u^{p-1} と u^{q-1} の和となるような常微分方程式の正值解の分岐を研究した。5 種類の分岐図が現れることを証明した。その結果、複数の正值解が存在する事を証明した。

5. 劣線形放物型偏微分方程式の定常解の安定性を研究した。正值定常解と負値定常解は指数漸近安定であることを証明し、その指数を具体的に与えた。小さな定常解は、不安定であることを証明した。また空間 1 次元の場合に、すべての定常解の安定性を調べた。

6. 単位球の内部で p ラプラス方程式を研究した。ディリクレ境界条件の下で正值解の存在を考察した。ネハリ多様体でラグランジェ汎関数を最小にするものを最小エネルギー解と呼ぶ。非線形項が球対称であり、 $|x| < a$ の範囲で 0 であり、 $a < |x| < 1$ の範囲で正の値をとるものとする。このとき、もし a が十分 1 に近いならば、少々エネルギー解は、球対称でないことを証明した。その結果、球対称正值解と球対称でない正值解の両方が存在する事を証明した。

7. 主要部が (p, q) ラプラス方程式であり, 非線形項がべき乗 u^{r-1} である場合の常微分方程式を研究した. ここで μ は分岐パラメーターであり, $1 < q < p$ かつ $1 < r$ を仮定する. p, q, r の大小関係により 5 つの状況が考えられる. $1 < r < q < p$, $1 < r = q < p$, $1 < q < r < p$, $1 < q < r = p$, $1 < q < p < r$ の 5 通りである. それぞれに場合に応じて正值解の分岐図を詳細に描いた. これにより, 正值解の一意性と非一意性を厳密に証明した.

8. 穴の空いた対象領域において p ラプラス方程式を考察した. ここで穴が空いた対象領域とは, 例えば, 下図のようなもの青い領域であり, これは二つの正 6 角形に囲まれた部分である.



青い部分の道幅が十分に細い場合を考える. このときに様々な対称解と非対称解が存在する事を証明した. G と H を直交群の閉部分群とする. H は G の真部分集合とする. 領域が G 不変であり, G と H が適切な仮定を満たすとき, H 不変な最小エネルギー解は G 不変でないことを証明した. この結果から, 上図の青い穴あきの 6 角形を領域として, p ラプラス Emden-Fowler 方程式を考えたときに, 120° 回転の不変性を持つ解の中でレイリー商を最小にする解は, 60° の回転不変性を持たないことが証明できる.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 R. Kajikiya and E. Ko	4. 巻 484
2. 論文標題 Existence of positive radial solutions for a semipositone elliptic equation.	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Math. Anal. Appl.	6. 最初と最後の頁 1-19
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2019.123735	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 R. Kajikiya	4. 巻 2149
2. 論文標題 Existence of positive radial solutions for a semipositone elliptic equation.	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 29-37
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 R. Kajikiya	4. 巻 264
2. 論文標題 Stability and instability of stationary solutions for sublinear parabolic equations.	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Differential Equations	6. 最初と最後の頁 786-834
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2017.09.023	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 R. Kajikiya	4. 巻 38
2. 論文標題 Nonradial least energy solutions of the p-Laplace elliptic equations.	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A	6. 最初と最後の頁 547-561
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2018024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R. Kajikiya, I. Sim and S. Tanaka	4. 巻 462
2. 論文標題 A complete classification of bifurcation diagrams for a class of (p,q) -Laplace equations.	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Math. Anal. Appl.	6. 最初と最後の頁 1178-1194
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2018.02.049	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 R. Kajikiya	4. 巻 18
2. 論文標題 Symmetric and asymmetric solutions of p -Laplace elliptic equations in hollow domains.	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advanced Nonlinear Studies	6. 最初と最後の頁 303-321
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/ans-2017-6023	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R. Kajikiya, I. Sim and S. Tanaka	4. 巻 25
2. 論文標題 Symmetry-breaking bifurcation for the Moore-Nehari differential equation.	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 1-22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-018-0545-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 R. Kajikiya, M. Tanaka and S. Tanaka	4. 巻 2017
2. 論文標題 Bifurcation of positive solutions for the one-dimensional (p,q) -Laplace equation.	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1-37
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R. Kajikiya	4. 巻 260
2. 論文標題 Symmetric mountain pass lemma and sublinear elliptic equations.	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Differential Equations	6. 最初と最後の頁 2587-2610
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2015.10.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R. Kajikiya	4. 巻 289
2. 論文標題 Nonradial positive solutions of the p-Laplace Emden-Fowler equation with sign-changing weight	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 290-299
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mana.201500103	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Komiya and R. Kajikiya	4. 巻 23
2. 論文標題 Existence of infinitely many solutions for the (p,q)-Laplace equation.	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 1-23
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-016-0402-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R. Kajikiya	4. 巻 41
2. 論文標題 Existence of nodal solutions for the sublinear Moore-Nehari differential equation.	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A	6. 最初と最後の頁 1483-1506
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2020326	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計27件（うち招待講演 11件 / うち国際学会 9件）

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Symmetric and asymmetric nodal solutions for the Moore-Nehari differential equation.
3. 学会等名 Differential Equations Day on ZOOM. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 梶木屋 龍治
2. 発表標題 Bifurcation of nodal solutions for the Moore-Nehari differential equation.
3. 学会等名 日本数学会, 千葉大学 (オンラインでの学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 梶木屋 龍治
2. 発表標題 Moore-Nehari 方程式の対称および非対称なnodal solution の存在
3. 学会等名 日本数学会, 熊本大学 (オンラインでの学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 梶木屋 龍治
2. 発表標題 劣線形 Moore-Nehari 方程式の nodal solution の存在
3. 学会等名 日本数学会, 慶應義塾大学 (オンラインでの学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 梶木屋 龍治
2. 発表標題 Symmetric and asymmetric nodal solutions for the Moore-Nehari differential equation
3. 学会等名 数理解析研究所, 研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 A priori estimate for the first eigenvalue of the p-Laplacian.
3. 学会等名 Equadiff2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Existence of positive radial solutions for a semipositone elliptic equation
3. 学会等名 International Workshop on PDEs and Applications. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 R. Kajikiya and E. Ko
2. 発表標題 Existence of positive radial solutions for a semipositone elliptic equation.
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Existence of positive radial solutions for a semipositone elliptic equation
3. 学会等名 愛媛大学における微分方程式セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 半線形楕円型方程式の群不変解の存在
3. 学会等名 第9回岐阜数理科学研究会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Infinitely many solutions for the (p,q) -Laplace equation.
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Infinitely many solutions for the (p,q) -Laplace equation.
3. 学会等名 The seminar on University of Ulsan (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Symmetric mountain pass theorem and sublinear elliptic equations.
3. 学会等名 International Workshop on Nonlinear PDEs 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Tanaka, R. Kajikiya and I. Sim
2. 発表標題 A complete classification of bifurcation diagrams for a class of (p,q) -Laplace equations.
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Group invariant positive solutions of a semilinear elliptic equation.
3. 学会等名 Mini workshop on variational problems (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Symmetric solutions of p -Laplace elliptic equations in hollow domains.
3. 学会等名 Equadiff 2017. (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Symmetric solutions of p-Laplace equations in hollow domains.
3. 学会等名 Nonlinear Analysis, PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 梶木屋龍治
2. 発表標題 穴の空いた領域におけるpラプラス方程式の対称解
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 R. Kajikiya, I. Sim, S. Tanaka,
2. 発表標題 A complete classification of bifurcation diagrams for a class of (p,q)-Laplace equations.
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 梶木屋龍治
2. 発表標題 半線形楕円型方程式の群不変解
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 梶木屋龍治
2. 発表標題 A complete classification of bifurcation diagrams for a class of (p,q) -Laplace equation.
3. 学会等名 非線形問題への常微分方程式の手法によるアプローチ (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Nonradial positive solutions of the p -Laplace Emden-Fowler equation
3. 学会等名 The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Stability of stationary solutions for sublinear parabolic equations.
3. 学会等名 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 梶木屋龍治
2. 発表標題 Stability of stationary solutions for sublinear parabolic equations
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 梶木屋龍治
2. 発表標題 Stability of stationary solutions for semilinear parabolic equations
3. 学会等名 常微分方程式の定性的理論とその周辺
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 梶木屋龍治
2. 発表標題 半線形放物型方程式の定常解の安定性
3. 学会等名 熊本大学応用解析セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 梶木屋龍治
2. 発表標題 穴の空いた対称領域におけるpラプラス方程式の対称解
3. 学会等名 微分方程式論ワークショップ 岐阜 2017
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------