

令和元年5月12日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05239

研究課題名(和文) 磁場中の波動伝播問題の散乱解析

研究課題名(英文) Analysis of scattering to wave propagation problems in magnetic fields

研究代表者

望月 清 (mochizuki, kiyoshi)

首都大学東京・理工学研究科・客員教授

研究者番号：80026773

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究はシュレディンガー方程式、クレイン-ゴールドン方程式などに関する様々な数理モデルを対象にする。中心課題を磁場中のこれらの方程式、特にクレイン-ゴールドン方程式の外部問題に対する平滑化効果、ストリッカー評価の確立に置き、一定の解決をみた。ただ、高次元のストリッカー評価では必要以上のエネルギーロスが生まれ、改良の余地を残した。更に、得られた結果を散乱問題の解析に応用した。量子グラフ上の散乱逆問題では星形無限グラフでの前研究の結果を、ループを伴う無限グラフの場合に拡張することを試み、解の一意性、安定性などの証明に成功した。ポテンシャルの再構成に関しては残念ながら部分的な解決に留まっている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は物理学の基礎方程式を対象にして、その解の時空での挙動を解析する。物理学の成果を跡付けしているとも言えるが、確立された数学が物理学を含む他分野の未来の発展に寄与することは疑えないことであろう。解析学は他分野と距離が近く、例えばグラフ上の量子力学はナノテクノロジーや量子コンピュータの回路設計などに応用される。しかし、この研究は直接応用を意識するものではなく、解析学の諸分野の交差する問題意識の一部でも整理し、統一的な理論の発展を願ってなされている。

研究成果の概要(英文)：In this project we are concerned with various wave propagation phenomena of Schrödinger and Klein-Gordon evolution equations. The central object is in the smoothing and Strichartz estimates for magnetic Klein-Gordon equations in exterior domain. Results are obtained successfully and are applied to analyze some scattering problems. Note that our Strichartz estimates, in three or more dimensional cases, require energy loss which seems unnecessarily high. There may remain a room we should make clear.

As for the 1 dimensional Schrödinger operators, the inverse problem to determine the potential from scattering matrix is studied on several infinite graphs containing loop, which partly make progress our former results for star-shaped infinite graphs. Main parts of our new results are restricted to the uniqueness and stability of solutions.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：磁場中のクレイン-ゴールドン方程式 平滑化効果 ストリッカー評価 時空依存の摂動 ループを伴う量子グラフ 散乱の逆問題

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究の対象は物理学の基礎方程式であり、その数理解析は長い歴史のなかで豊富な結果が蓄積されている。その中で、解の漸近挙動や散乱理論は現在でも多くの研究人口を抱え、日本はもとより、ヨーロッパ諸国、南北アメリカで活発な研究が続けられ、著しい成果が得られている。承知のように、この分野での日本の研究者の貢献は大きい、それを支える一員たろうとこの研究の代表者も長い間、「波動伝播問題の散乱解析」に関わる研究活動を継続している。磁場を伴う外部境界値問題の平滑化効果と Strichartz 評価については、前回の研究成果であるレゾルベントの一般評価が基本的な役割をする。時間依存または非線形の摂動に関する散乱問題は上の効果、評価を基に研究が進められる。量子グラフにおける逆散乱問題は以前の marchenko-Mochizuki-trooshin のループと 1 本の レイからなる問題の結果を重ね合わせる作業が可能であろう。

2. 研究の目的

本研究は波動伝播の散乱現象に関わる次の 3 つの課題を追求する。

- i) 磁場を伴う分散型方程式の外部境界値問題の平滑化効果と Strichartz 評価
- ii) 時間依存の摂動、または非線形摂動による発展方程式の散乱問題
- iii) ループを含むグラフ上の Schrödinger 作用素に対するトレース公式と散乱逆問題

課題 i) については、磁場中の波動伝播問題、特に Schrödinger 作用素、Klein-Gordon 作用素の外部境界値問題に対して、解の平滑化効果、 L^pL^q 評価 (Strichartz 評価) を研究の中心に据える。この問題は欧米や日本の実解析、偏微分方程式の分野の主要な研究課題であり、多様な結果が得られている。しかし、Fourier 解析を基盤とする多くの研究は全空間の問題に限られている。ここでは外部境界値問題を主な対象とする。前研究で得られた低次元を含む Schrödinger 作用素の一般レゾルベント評価を基に全空間での結果の書き換えを追求する。

課題 ii) については、媒質の非等方性による波の歪みは古くからの研究対象であるが、本研究では歪みが空間変数だけでなく時間変数にも依存する場合を研究対象とする。Schrödinger 作用素については Yajima, Yafaev, Jensen 等の結果が Adati-Kawamoto 等により、時間に依存する電場を伴う Schrödinger 発展方程式の散乱問題に適用されている。一方、摂動が時間変数だけに依る波動伝播問題に対しては Reissig, Todorova-Yordanov, Hirose 等によりエネルギーの有界性を保証する条件が与えられている。ここでは、これらの問題を時空の変数に依存する外部領域での摂動に対して考え、エネルギー減衰、非減衰、散乱作用素の構成などに焦点を当てる。

非線形散乱に関しては i) の L^pL^q 評価をを有効に使い、既知の結果の外部問題への拡張を試みる。

課題 iii) については、グラフ上の量子力学は回路基板に沿った微粒子の量子論的運動を説明するだけでなく、ナノテクノロジーや量子コンピュータの回路設計などに応用されるため、多くの結果が発表されている。Agranovich-Marchenko, Boman-Kurasov, Damiel 等。しかし、重要なループを含む問題への取り組みが遅れている。ここでは我々の以前の結果 (Marchenko-Mochizuki-Trooshin) をもっと一般の太陽型グラフ上の問題に拡張する。さらに、派生するレゾナンスの影響とその解消に注目して、散乱の逆問題に関する一意性、安定性、再構成問題に取り組む。これらは前研究の研究課題を引き継ぎ、統一的な理論の更なる発展を期すものである。

3. 研究の方法

本研究は理論研究であるから、研究方法が年度によって大きく変わることはない。発表された論文を検討し、著者と直接コンタクトをとったりして考察をすすめるが、研究を進めるに際し、そのきっかけを、セミナーや研究集会で広く関連する課題の進展を見、討論を重ねるところからもたらされることが多い。ただし、研究の進捗には、これらを基にした深い、集中した、個人での考察が決定的に重要であることは言うまでもない。

今まで主催していた 3 大学偏微分方程式セミナーは、現在、中央大学偏微分方程式セミナー、解析学研究セミナーに分かれて運営されているが、そこを中心として、いくつかの研究集会を組織する。幸い、これらのセミナーは代表者の元学生を中心に組織されているので、彼らとの日常的な議論が可能になっている。

4. 研究成果

本研究の課題：磁場中の「波動伝播問題の散乱解析」に関する基本的な手法、結果は 2017 年度に CRC Press, Taylor & Francis Group から出版した教科書 [1] にまとめられている。そこには一般化固有関数の増大度評価と極限吸収の原理に関する、未発表の新しい結果も含まれていて、その一部は論文 [4] に報告されているが、定常問題に対する重み付きエネルギー積分の精密な評価により、摂動としてのポテンシャルの条件を大幅に改善でき、さまざまな問題に適用可能となった。例えば very short-range potential に対する一般レゾルベント評価、oscillating long-range potential, exploding potential 等に対する埋蔵固有値の性質とレゾル

ベント評価などを統一的に扱うことなど。[4]の結果はさらに改良可能で、現在執筆中の論文では、非等方の oscillating long-range や無限遠方で $1/|x|^2$ のオーダーでマイナス無限大に発散するぎりぎりのポテンシャルの扱いが可能になっている。もちろん磁場中の外部領域での問題である。全空間の問題ではもっとモダンな手法が開発されているが、外部領域ではそれは適用できない。

論文 [1], [3] はこの結果を基に主に Klein-Gordon 方程式の平滑化効果、Strichartz 評価を導いている。平滑化効果に関しては、同次方程式の場合は Schrödinger 方程式の対応する結果から導くことが可能であるが、非同次方程式に対してそれは有効でなく、直接 Klein-Gordon 方程式の外部問題を扱わなければならない。Fourier 解析が使えないことも困難さの原因となる。[3] では方程式をエネルギー空間での発展方程式に変形して、matrix form の生成作用素のレゾルベント評価を component ごとに丁寧に求めていく。[1] では [3] の結果を用いて摂動論的手法で Strichartz 評価を求め、即ち、自由な方程式の Strichartz 評価と摂動を伴う平滑化効果を組み合わせる。そのため、磁場に対する条件がみつくなっている。しかし、摂動は時間依存も許すもので、応用範囲は広いとおもわれる。課題も残っており、高次元の場合の energy loss が全空間の場合より悪くなり、まだ、改良の余地がある。

論文 [5] はレゾルベントの一樣評価を自己共役性の崩れる場合に拡張して、それを消散型波動方程式の外部問題に対して適用し、この場合にも極限振幅の原理が成り立つことを示している。ただし、空間 2 次元の場合の結果に改良の余地を残している。]

論文 [2], [6], [7] は量子グラフにおける逆散乱問題の研究である。ループを含む sun-type, Lasso-shaped の無限グラフ上の Schrödinger 作用素に対して、散乱行列からポテンシャルを決定する逆問題を考えるのであるが、固有値、レゾナンスの現れ方が star-shaped のグラフに比べて複雑になり、同様の結果を得るまでには至っていないが、これらの論文で逆問題の一意性、安定性については解決をみた。再構成の部分の解決は部分的で、改善に向けて目下努力を続けている。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計7件)

- [1] 望月 清, 村井 宗二郎, Smoothing and Strichartz estimates for perturbed magnetic Klein-Gordon equations in exterior domain and some applications, New Tools for Nonlinear PDE and Applications, Birkhäuser, 査読あり, 263-280 (to appear)
- [2] 望月 清, I. トルシン, On conditional stability of inverse scattering problem on lasso-shaped graph, Proc. 11th ISAAC Congress 2017, 査読あり, (to appear)
- [3] 望月 清, 村井 宗二郎, Smoothing properties and scattering for magnetic Schrödinger and Klein-Gordon equations in exterior domain with time dependent perturbations, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 査読あり, 57, 371-393, 2017.
- [4] 望月 清, Growth estimates of generalized eigenfunctions and principle of limiting absorption, スペクトル散乱理論とその周辺, 数理研究録, 査読なし, No 2045 (2017), 85-99.
- [5] 望月 清, 中澤 秀夫, Uniform resolvent estimates for stationary dissipative wave equations in an exterior domain and their application to the principle of limiting amplitude, New Trends in Analysis and Interdisciplinary Applications, Springer International Publishing AG, 査読あり, 521-527 2017.
- [6] 望月 清, I. トルシン, On inverse scattering on sun-type graph, New Trends in Analysis and Interdisciplinary Applications, Springer International Publishing AG, 査読あり, 319-324 2017.
- [7] 望月 清, I. トルシン, On stability of inverse scattering problem on lasso-shaped graph, International Scientific-Practical Conference Part I, Ufa, 査読あり, 60-62, 2017.

[学会発表](計12件)

以下は望月 清による種々の研究会での招待講演である。

1. 散乱理論における定常的方法について, 北九州での偏微分方程式研究集会, 2018.11.24, (小倉 KMM ビル, 北九州市小倉区)
2. Klein-Gordon 方程式に対する平滑化効果と Strichartz 評価, 応用解析研究会, 2018.10.20, (早稲田大学理工学部, 東京都新宿区)
3. Growth estimates of generalized eigenfunctions to the Schrödinger equations and the principle of limiting absorptions -the case of exploding potentials-, 解析学研究セミナー, 2018.9.15, (都立産業技術高専, 東京都荒川区)
4. An introduction to the scattering theory -a stationary approach-, Hyperbolic PDEs and Related Topics, 2018.1.27, (中央大学理工学部, 東京都文京区)
5. 外部領域における平滑化効果と Strichartz 評価, 北九州での偏微分方程式研究集会, 2017.11.25, (小倉 KMM ビル, 北九州市小倉区)
6. Smoothing and Strichartz estimates in exterior domain, Recent Topics on PDEs,

2017.11.17, (中央大学理工学部, 東京都文京区)

7. Smoothing properties and scattering for magnetic Klein-Gordon equations in exterior domain with time dependent perturbations, 11th ISAAC Congress, 2017.8.17, (Linnaeus Univ. V "axj" o, Sweden)
8. 波動伝播問題における摂動論, I, II, 第5回偏微分方程式レクチャーシリーズ, 2017.13,14, (福岡工業大学, 福岡市東区)
9. 散乱理論入門, 現象解析特別セミナー, 2017.3.15, (茨城大学教育学部, 水戸市)
10. Growth estimates of generalized eigenfunctions and principle of limiting absorptions, Spectral and Scattering Theory and Related Topics, 2016.12.26, (数理解析研究所, 京都市左京区)
11. 外部領域での平滑化効果について, 北九州での偏微分方程式研究集会, 2016.11.26, (小倉リーセントホテル, 北九州市小倉区)
12. Growth estimates of generalized eigenfunctions and principle of limiting absorptions, Recent Topics on Dispersive Equations, 2016.8.30, (中央大学理工学部, 東京都文京区)

[図書](計1件)

- [1] 望月 清, Spectral and Scattering Theory for Second-Order Partial Differential Operators, Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton-London-New York, 2017, 231pp.

[産業財産権]

出願状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年:
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名:

ローマ字氏名:

所属研究機関名:

部局名:

職名:

研究者番号(8桁):

(2)研究協力者

研究協力者氏名:

ローマ字氏名:

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。