

令和元年6月24日現在

機関番号：24201

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05241

研究課題名（和文）屈折現象を伴う波動伝播に対する空間遠方での漸近解析とその散乱理論への応用

研究課題名（英文）Asymptotic analysis for wave propagation with refracted phenomena and the application to scattering theory

研究代表者

門脇 光輝（Kadowaki, Mitsuteru）

滋賀県立大学・工学部・教授

研究者番号：70300548

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）： 屈折現象が伴う波動伝播に対する散乱理論を空間遠方での漸近解析を用いて定常的に展開し、成果を得た。具体的には、異物などが混入した2層媒質からなる3次元無限領域における波動伝播問題に対して、研究目的（散乱現象の詳細な記述）を達成した。さらにこの研究を通して得られた知見に基づき地震波のモデルである自由境界付き3次元半空間における弾性波動伝播に対しても、同様な理論を展開するための基礎的な成果を得た。また、関連して非線形シュレディンガー方程式の逆散乱問題、摩擦付き定常波動方程式の解に対する評価、リーマン多様体上のマクスウェル方程式の解の正則性に関する成果も得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

波動伝播に対する散乱理論の数学的な整備は、数学はもちろん、波の入射に基づく非破壊検査との絡みでも重要である。とりわけ時間によらない定常的な理論展開は、非破壊検査に関する数値計算との親和性の観点からも有用である。しかし屈折現象を伴う波動伝播においては、その研究成果の蓄積が十分とは言えない状況であった。これに対して本研究で得た成果は、その第一歩的なものであり、実際の問題に関わる数値計算の数学的後盾になりうる。また、分担者によって得られた成果は、本研究のための数学的な道具立てにもなりうるもので、これらは今後の研究の推進に有用なものである。

研究成果の概要（英文）： We studied the stationary scattering theory for the wave propagations with the refraction phenomena. The study was done by using asymptotic analysis at infinity of space. The main difficulty arises from the singularity caused by the refraction phenomena. As a result, we derived an asymptotic expansion at infinity of solutions to the Helmholtz equation in a perturbed two-layered media. This wave propagation is simplest model of one with the refraction phenomena. Moreover, we obtained an elementary estimate for the elastic wave propagation in a perturbed half space with free boundary condition. This result is important one to establish the same scattering theory as the above wave propagation.

We also obtained related results, which are concerned with inverse scattering problem for non-linear Schroedinger equations, the stationary wave equations with dissipative terms and the regularity at interface of the solutions to Maxwell's systems on the Riemannian manifolds, respectively.

研究分野： 数学的散乱理論

キーワード： 屈折現象が伴う波動伝播 ヘルムホルツ方程式 散乱および逆散乱問題 漸近解析 レゾルベント評価 多様体上のマクスウェル方程式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

もともと散乱理論とは、散乱体(原子など)に向けて平面波(電子などの粒子)を入射したときの散乱波・反射波の様子を研究する物理学の分野を指しているが、その数学的定式化も同じく散乱理論と呼ばれている。また、近年では非破壊検査への応用を念頭においた立場(工学)からも散乱理論の有用性は高まっている。例えば、建設から月日が経過した橋などの構造物の内部での空洞や亀裂の有無を、もしくは作成された構造物への異物混入の有無を、構造物を破壊することなく調査する際には、構造物内部へ平面波を入射し、その空洞や亀裂(以下、これらを散乱体と記す)による反射波(以下、散乱波と記す)を観測することで行われている。散乱体が小さい場合は、周期が短い波を用いられる。この場合の数学的定式化は無限領域または半無限領域での波動伝播と解釈でき、その領域内での線形の波動方程式が波の伝播を支配・記述すると考える。ただし、構造物が複数の異なる媒質・材質で構成されていたり、橋のように板状(半無限領域と解釈する)であったりすることから、散乱体がない場合でも入射波に対する反射波と透過波・屈折波(または弾性波における屈折の反射波)が発生する。従って、散乱体がない場合の伝播構造を数学的に解明することは極めて重要である。しかし、屈折波の伝播方向が入射波のそれとは本質的に異なることで現れる特異性のために解明が十分に進んでいない状況にあった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、半無限領域における弾性波動伝播や層状媒質からなる無限領域における音響波動伝播などに対して散乱体を仮定した場合、平面波を入射した際に、媒質と媒質の境目などによるその反射波と屈折波・透過波に加えて、散乱波が発生する様子を数学的に記述することである(以下、散乱体がない波動伝播を非摂動系、ある場合を摂動系と記すことにする)。より具体的には、摂動系に関する一般化された固有関数、すなわち波動方程式から時間と空間変数を分離することによって得られる空間変数のみの方程式(ヘルムホルツ方程式)の解、が空間遠方で入射波、反射波、屈折波・透過波そして散乱波の重ね合わせ(和)で記述されることを示すことでことである。その際に、次の2点を合わせて示すことが本研究の核である：

散乱波は四方八方に伝播していく物理的イメージの通り3次元球面波で記述される(正確には空間遠方において球面波で近似される)。

散乱波の球面波による近似誤差は散乱波を観測する方向に関係なく一様に評価できる。

なお、散乱波を表す球面波の係数(振幅)が散乱振幅と呼ばれる量で、散乱体の情報を引き出す上で重要な量となる。この一連の定式化は散乱振幅を数値計算で導出する際の数学的後ろ盾になる。

3. 研究の方法

研究目的達成のために重要な役割をするのが非摂動系のグリーン関数に対する空間遠方での漸近解析である。ちなみに、非摂動系を単独媒質からなる無限領域における波動伝播とした場合、そのグリーン関数は具体的な関数(特殊関数)で記述でき、その漸近解析は特殊関数に対するそれに基づいて行われている。一方、本研究で対象とする屈折現象を伴う波動伝播に対するグリーン関数を特殊関数で具体的に表現することは難しい。そこで、本研究ではWilcox(1984)などによる層状媒質中の波動伝播に対する固有関数展開定理とMatsumura(1976)などで見られる定常(停留)位相の方法(フーリエ型積分に対する漸近解析)を用いた議論を組み合わせた方法を採用した。ただし、標準的な定常位相の方法の直接適用では、肝心の屈折現象には対応できない箇所が少なくないために議論の見直し・改良を適宜行った。そして得られた非摂動系のグリーン関数に対する漸近解析に基に散乱理論のよく知られた議論を展開して、研究目的の達成を目指した。

4. 研究成果

代表者である門脇と分担者の渡邊道之は、協力者の磯崎の助言を参考に、屈折現象を伴う波動伝播に対するヘルムホルツ方程式の解の空間遠方での漸近解析とそれによる散乱理論に関する成果を得た。具体的には2層媒質からなる3次元無限領域に散乱体(異物)を仮定し、そこでの波動伝播問題に対して目的の成果を得た(学会発表、[渡邊道之, 門脇 隆, 磯崎 隆](#), および最終年度に論文投稿に至る)。この波動伝播は屈折現象が起こるモデルで最も基本的なものである。しかしながら、このモデルに対してさえ、これまでに国内外において、本研究で掲げた目的に到達した結果は見当たらない状況であった。この意味で、この成果は本研究が目指した散乱理論の第一歩と位置づけされる。さらに、この研究で得た知見は、当初から研究対象として掲げていた地震波のモデルである自由境界付き3次元半空間における弾性波伝播問題に対しても有効である。実際に、この波動伝播に対しても同様の解析を行い、概ね目的を達成しつつある(雑誌論文、[渡邊道之, 門脇 隆](#), および学会発表)。なお、本研究の技術的な核は屈折現象が引き起こす特異性にも対応可能な定常位相の方法の開発である。この方法は屈折現象を伴う他の波動伝播にも適用できる可能性が高いことから更なる研究への寄与が期待できる。

関連する成果として、渡邊道之は非線形シュレディンガー方程式に対する逆散乱問題に対する成果を得た(雑誌論文、[渡邊道之, 門脇 隆](#))。分担者の中澤は摩擦項を伴う波動方程式から導かれるヘルムホルツ方程式の解の評価の研究を行い、一定の結果を得た(雑誌論文、[中澤 隆](#), および学会発表、[中澤 隆](#))。同じく分担者の渡辺一雄はリーマン多様体上のマクスウェル方程式の解に対

する界面上の正則性を研究し、成果を得た(学会発表 , ,)。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 3 件)

Michiyuki Watanabe, Time-dependent method for non-linear Schrödinger equations in inverse scattering problems, JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS , 査読有, Vol.459 , 2018, pp.932-944
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.11.012>

Hiroshi Isozaki, Mitsuteru Kadowaki and Michiyuki Watanabe, Asymptotic behavior of stationary solutions to elastic wave equations in a perturbed half-space, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, Vol.2045 , 2017, pp.1-20
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/2045.html>

Kiyoshi Mochizuki and Hideo Nakazawa, Uniform resolvent estimates for stationary dissipative wave equations in an exterior domain and their application to the principle of limiting amplitude. New trends in analysis and interdisciplinary applications, 査読有 , pp.521-527, Trends Math. Res. Perspect., Birkhäuser/Springer, Cham, 2017.
<https://www.springer.com/series/10851>

[学会発表](計 17 件)

渡邊道之, Time-dependent methods in inverse scattering problems for Hartree-Fock equations, RIMS 共同研究(公開型)「偏微分方程式に対する逆問題とその周辺」(京都大学数理解析研究所), 2019 年

門脇光輝, Uniform asymptotic profiles of stationary wave propagation in perturbed two-layered media , 研究集会「スペクトル・散乱 京都今出川シンポジウム」(同志社大学今出川キャンパス), 2019 年

渡辺一雄, Maxwell 方程式系の解の界面-その一般化-, 応用解析研究会(早稲田大学), 2018 年

渡辺一雄, Interface regularity of the solutions for Maxwell system, 第 28 回研究集会「数理物理と微分方程式」(函館 湯の川温泉 KKR はこだて), 2018 年

渡邊道之, Time-dependent methods in inverse scattering problems for Hartree-Fock equations ,The 16th Linear and Nonlinear Waves (ピアザ淡海 滋賀県立県民交流センター), 2018 年

中澤秀夫, ヘルムホルツ方程式の解の評価, 名古屋偏微分方程式研究集会(名古屋工業大学), 2018 年

渡邊道之, Time-dependent methods in inverse scattering problems for Hartree-Fock equations , 名古屋偏微分方程式研究集会(名古屋工業大学), 2018 年

門脇光輝, Uniform asymptotic profiles of stationary wave propagation in perturbed two-layered media, 研究集会「大分微分方程式研究集会」(サテライトキャンパスおおいた), 2018 年

渡辺一雄, 偏微分方程式系の解の界面正則性, スペクトル理論セミナー(学習院大学), 2018 年

門脇光輝, 定常波動方程式の解とその空間遠方での漸近解析について, 第 38 回 解析学研究セミナー (東京都立産業技術高等専門学校荒川キャンパス), 2017 年

門脇光輝, Uniform asymptotic profiles of stationary wave propagation in perturbed two-layered media, 研究集会「微分方程式の解の伝播構造」(京都大学数理解析研究所), 2017 年

門脇光輝, Uniform asymptotic profiles of stationary wave propagation in perturbed two-layered media, 第 69 回 YU Nonlinear Seminar (山口大学吉田キャンパス), 2017 年

門脇光輝, 摂動された二層媒質における波動伝播に対する定常解とその漸近解析, 第 14 回浜松偏微分方程式研究集会(静岡大学浜松キャンパス), 2016 年

渡邊道之, Asymptotic behavior of stationary solutions to elastic wave equations in a perturbed half-space, RIMS 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」(京都大学数理解析研究所), 2016 年

中澤秀夫, 磁場中のシュレディンガー方程式に対する一様リゾルベント評価とその応用, RIMS 共同研究「微分方程式に対する散乱理論の展開」(京都大学数理解析研究所), 2016 年

門脇光輝, On scattering amplitude for wave propagation in perturbed two - layered media, 2016 夏の作用素論シンポジウム, 2016 年

門脇光輝, On scattering amplitude for wave propagation in perturbed two - layered media, 第 5 回岐阜数理解析研究会, 2016 年

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：中澤 秀夫

ローマ字氏名：NAKAZAWA, hideo

所属研究機関名：日本医科大学

部局名：医学部

職名：教授

研究者番号(8桁)：80383371

研究分担者氏名：渡辺 一雄

ローマ字氏名：WATANABE, kazuo

所属研究機関名：北里大学

部局名：一般教育部

職名：教授

研究者番号(8桁)：90260851

研究分担者氏名：渡邊 道之

ローマ字氏名：WATANABE, michiyuki

所属研究機関名：新潟大学

部局名：人文社会教育科学系

職名：准教授

研究者番号(8桁)：9037481

(2)研究協力者

研究協力者氏名：磯崎 洋

ローマ字氏名：ISOZAKI, hiroshi

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。