

令和 4 年 9 月 12 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2021

課題番号：16K05247

研究課題名(和文) 球面タイリングの対称性と変形

研究課題名(英文) Symmetry and deformation of spherical tiling

研究代表者

赤間 陽二 (Akama, Yohji)

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号：30272454

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：オイラーの法則により合同な多角形による球面タイリングは3角形・4角形・5角形によるものしかなく、特に合同な等辺5角形による球面タイリングは、5角形細分タイリング、「時差帯」に類するタイリング、および直前のタイリングのflip修正であることを示した。多面体の剛性を証明するCauchyのarm補題は平面に対するものだが、その球面版を考察した。また、球面は面積が有限で球面では異なる「直線」は交差するため、合同な多角形による球面タイリングの分類が組み合わせ論的に困難なため、この問題への抽象的接近法として、タイリングの対称性に加えて、曲面のガウス曲率に対応する、グラフの組み合わせ曲率の理論を見出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

球面は平面の幾何的直観を相対化するが、球面は曲がりの度合いが正の一定である一方で平面のそれは0の一定であり、球面と平面のタイリング(重なりなく隙間なく埋めつくすこと)は、装飾として供され、数学的物理的関連が認められつつある。合同な多角形による平面タイリングの分類は伝統があり困難であるが、球面は面積が有限で球面では異なる「直線」は交差するため、合同な多角形による球面タイリングの分類研究は新しく、組み合わせ論的に困難であるが、そこで、計算機の援用の必要性を我々は示唆した。この問題への抽象的接近法として、曲面のガウス曲率に対応する、グラフの組み合わせ曲率の理論を見出した。

研究成果の概要(英文)：By Euler's law, the spherical tilings by congruent polygons are only by triangles, quadrangles, and pentagons. In particular, a spherical tiling by congruent equilateral pentagons is exactly a pentagonal subdivision of a tiling, an earthmap tiling or a flip modification of an earthmap tiling. Moreover, we introduce a new technique similar to Cauchy's arm lemma for polyhedra. Because the area of the sphere is finite and lines on the sphere necessarily intersect, the research on the classification of the spherical tilings by congruent polygons is of recent, and combinatorially hard. As an abstract approach to this problem, we find out not only the symmetry of the tilings, but also the combinatorial curvature of graph which corresponds to Gauss curvature of surfaces.

研究分野：応用数学

キーワード：タイリング 合同な多角形 曲率 グラフ

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

- 問題 1. (ヒルベルトの第 18 問題(2)の球面版) 球面 4 角形と球面 5 角形で, anisohedral なものの列挙。Anisohedral tile とは、そのコピーでタイリングできるが、対称群がタイル全体に推移的に作用するタイリング (**タイル推移的タイリング** という) が無い時を言う。
- 問題 2. タイル推移的な球面タイリングの骨組みの特徴付け定理 [Grünbaum and Shephard, Spherical tilings with transitivity properties. 1982] の逆問題。
- 問題 3. 合同な多角形による球面タイリングの骨組みを保った連続変形の自由度と、そのような自由度に伴う対称型の変化回数にはどのような関係があるか?

ユークリッド平面以外の定曲率曲面で組み合わせ的議論と三角法的議論が適用可能な球面において、タイリングの分類を行うことを考えた。このことは、対称性の高い立体や多面体論などとの架け橋になることが期待された。

2. 研究の目的

問題 1: 合同な球面三角形に分割できる球面 5 角形で、5 辺の長さの組み合わせがある条件を満たしている anisohedral なものを同定する。[Sakano-Akama15] の手法で [Ueno-Agaoka02] に帰着する。

問題 2: 「合同な多角形による球面タイリング T が、GS 骨組みを持つがタイル推移的でないならば、 T の骨組みは反角柱の骨組み、変形立方体の双対の骨組み、あるいは、変形 12 面体の骨組みを持つ」が証明できそうである。 T の骨組みがプラトン多面体ならば、[A. and Yan, On Deformed Dodecahedron Tiling. arXiv:1403.6907, 2014] が参考になり、タイルが三角形の場合は [Ueno-Agaoka02] から従い、タイルが凸四角形で骨組みがアルキメデス双対ならば、[A., Sakano and N. van Cleemput, Spherical tilings by congruent quadrangles over pseudo-double Wheels (III) -- deformations of spherical isohedral polygonal tilings, preprint, '14] で証明した。タイルが凹な場合は骨組みの multipartite の構造や、グラフが誘導する、多角形の内角の「有理」係数連立一次方程式の性質 [A. and N. van Cleemput, Spherical tilings by congruent quadrangles: Forbidden cases and substructures, *Ars Math. Contemp.*, 8(2), '15] を、さらに考察する。

問題 3: 「合同な多角形による球面タイリングの骨組みを保った連続変形の自由度は、そのような自由度に伴う対称型の変化回数に等しい」は骨組みがプラトン多面体またはアルキメデス双対の場合は確かめた。一般に陰関数定理から証明できそうである。

3. 研究の方法

コンピュータを用いて列挙する。また、多面体論の組み合わせ論、コーシーの腕補題などを利用する。

4. 研究成果

合同な等辺球面 5 角形による球面タイリングの分類などを完成させた。定曲率空間の正多角形による多面体的曲面の研究に拡張し、さまざまな離散曲率で曲面を制御して分類を行った。

Gao, Shi と Yan は、合同な 12 個の球面 5 角形による辺と辺が合致する球面タイリング、我々は変形 12 面体タイリングと呼ぶ、はちょうど 1 個の 2-パラメータ族であることを予想したが、このことを証明した。この際に、多面体の剛性定理を証明するコーシーの腕補題の球面版においてはジョイントにおけるターン角として 0 を許せないことがわかった。これは、球面三角形では必ずしも、最大内角は最長の辺の対角ではないことによる。これにより、問題 3 を展開し

た。また、我々は、このタイリングと、プラトン多面体から作られる等辺 5 角形による球面タイリングの対称群を決定した。特に、変形 12 面体タイリングは isohedral、すなわち、対称群が面全体に対して推移的に作用することを証明した。これで、問題 2 を部分的に解決した。

単位球面の正 5 角形による辺と辺が合致するタイリングがちょうど 8 個しかないことを証明した。すなわち、プラトン多面体から作られる等辺 5 角形による球面タイリングで、面数が 12、24、60 であるもの、および、4 個の earth map tiling(時間帯の形をしたタイリング)で面数が 16,20,24,24 のもの、さらに、面数 20 の earth map tiling から flip 修正によってできる一つのタイリング。

A curvature notion for planar graphs stable under planar duality

(Bobo Hua, Yanhui Su, Lili Wang との共著), Volume 385, 16 July 2021, 107731

Advances in Mathematics においては次の成果を得た。Woes は、平面グラフの辺の集合に対して曲率を導入したが、我々は、それを χ -曲率と呼ぶが、それは平面グラフの双対を取る操作に関して安定である。我々は、 χ -曲率が非負である無限平面グラフのクラスの幾何的・組み合わせ的性質を調べた。グラフ理論における放電論法(discharging method)により、我々は、そのような無限平面グラフにおいて、次数 k の頂点(面)の個数は、 k が 6 でない限り、有限であることを示した。主定理として、非負の χ -曲率を持つ無限平面グラフに対して、次数が 8 以上の頂点の個数と次数が 8 以上の面の個数の和が高々 1 であることを示した。

DeVos-Mohar07 や Ghidella17 に動機付けられて、spherical polyhedral surfaces のクラスを考え、球面タイリングを許容しないものの面積と、単位球面の面積との gap を評価した。

また、頂点に集まる内角の和が少なくとも 2π であり、面が双曲正多角形に isometric であるような、双曲多面体的曲面を研究した。このような曲面の組み合わせ的情報は、組み合わせ曲率が至る所で負であるユークリッド的多面体的曲面と同一視できる。我々は、滑らかでない双曲的多面体的曲面の面積と滑らかな双曲的多面体的曲面との間にギャップがあることを証明した。我々は、骨組みが 3-正則であるグラフでダブルトラスに homeomorphic である双曲的多面体に対して、そのようなギャップを計算した。その際に Bolza 曲面のポロノイ分割を計算した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Akama Yohji, Hua Bobo, Su Yanhui, Wang Lili	4. 巻 385
2. 論文標題 A curvature notion for planar graphs stable under planar duality	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 107731 ~ 107731
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2021.107731	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akama Yohji, Wang Erxiao, Yan Min	4. 巻 394
2. 論文標題 Tilings of the sphere by congruent pentagons III: Edge combination a5	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 107881 ~ 107881
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2021.107881	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akama Yohji, Hua Bobo, Su Yanhui, Wang Lili	4. 巻 385
2. 論文標題 A curvature notion for planar graphs stable under planar duality	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 107731 ~ 107731
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2021.107731	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yohji Akama	4. 巻 49
2. 論文標題 Classification of spherical tilings by congruent quadrangles over pseudo-double wheels (II) - the isohedral case	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1--34
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 赤間 陽二
2. 発表標題 Computational Study on Combinatorial curvatures and Forman curvatures of planar graphs
3. 学会等名 復旦大学数学学術報告
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 赤間 陽二
2. 発表標題 組み合わせ曲率と正多角形による多面体的surface
3. 学会等名 2018年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Yohji Akama
2. 発表標題 Deza's last problems
3. 学会等名 Franco-Japanese Days on Combinatorics and Optimization 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yohji Akama
2. 発表標題 Spherical tilings by congruent 4-gons on Archimedean dual skeletons
3. 学会等名 The 12th Annual Meeting of the International Academy of Mathematical Chemistry (IAMC) and the 2016 International Conference on Mathematical Chemistry (ICMC 2016) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~akama/stcq>
Classification of spherical monohedral tilings
<http://www.math.tohoku.ac.jp/~akama/stcq/>
<https://www.math.tohoku.ac.jp/~akama/stcq>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	復旦大学	香港科学技術大学		
中国	復旦大学	上海数学中心		
中国	復旦大学	福州大学		
中国	香港科学技術大学	復旦大学		
クロアチア	Rdjer Boskovic Institute			
中国	香港科学技術大学			
ベルギー	Gent university			