様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 6 月　 6 日現在

機関番号：３２７０６
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５２６０

研究課題名（和文）グラフの変形操作についての研究

研究課題名（英文）A study of deformation operations of graphs

研究代表者

中上川　友樹（Nakamigawa, Tomoki）

湘南工科大学・工学部・教授

研究者番号：２０３８６８９０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：(1) グラフの石交換群について．グラフの自己同型の全体は群としての構造を持ち，自己同型群と呼ばれる．グラフ上の隣接する石（頂点）の交換操作を繰り返し用いることによりどのようなグラフの自己同型が実現できるかを研究した．
(2) コードダイアグラムの展開について．交差する２本の弦から交差しない２つの弦を生成する弦の展開操作に関する研究を行なった．与えられた弦の集合から出発して弦の展開操作を繰り返すことにより最終的に非交差ダイアグラムの重複集合が得られる．この重複集合の数え上げに関する公式を導いた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究課題では，グラフについての操作を研究対象としている．この操作が現実社会での行為と対応する場合には工学的な応用がある．例えば，ロボット工学において，複数ロボットの動作可能域としてのフィールドを盤グラフとし，複数ロボットの交換可能性を石グラフとするとき，フィールド上のロボットの動作は本研究課題におけるグラフパズルpuz(G,H)としてモデル化される．

研究成果の概要（英文）：(1) Pebble exchange group of graphs: A whole set of graph automorphisms has a structure of a group, and it is called an automorphism group. We have studied what kind of graph automorphisms can be realized by repeatedly exchanging two pebbles(vertices) which are adjacent to each other on the graph.
(2) Expansion of chord diagrams: We have studied the chord expansion, which generates a pair of nonintersecting chords from a pair of intersecting chords. Beginning from a given chord diagram, by iterating the chord expansion, we have eventually a multiset of nonintersecting chord diagram. We have derived counting formulas for the multiset.

研究分野：離散数学

キーワード：グラフ理論　グラフの自己同型　グラフパズル

１．研究開始当初の背景

いわゆる pebble motion planning あるいは reconfiguration problem と呼ばれる問題群は，ロボット工学などにおける高い応用性に支えられ，現在大きく発展している重要な研究領域である．我々は，こうした問題群を包含する，新しいグラフ理論的モデル(Graph Motion on Graphs)を提案し，当該モデルの構造に関わる様々な理論的考察(極値グラフ理論，代数学的グラフ理論，組合せ最適化理論等に基づく，構造定理群の証明)，および関連する様々なグラフ・アルゴリズムについての定性的・定量的分析を行うことが当初の目的であった．

15パズルというよく知られたパズルがある．これはボードグラフを4×4-grid として，その右下隅を除く15頂点に15個のラベル付きの碁石を一つずつ配置し，各碁石を空白領域に順次スライドさせていく問題として定式化できるが，このようにして得られる配置の置換が交代群をなすことは，既に1897 年に知られている．1973 年にR. M. Wilson は，この問題を任意のボードグラフG上にGの頂点数-1個のラベル付き碁石を配置する問題へと一般化し，そのfeasibility problem（碁石の任意の配置同士が移り合うボードグラフの形状を特徴付ける問題）についてのエレガントな解答を与えた．同時期にはR. Stanley も同じ問題を提起しており，D. Greenwell and L. Lovasz も若干弱い結果を得ている．

これらの問題は純粋数学上の理論的興味に端を発したものであるが，他方において多くの実際的な問題（コンピュータのメモリアロケーション問題，ロボットの移動問題等々）に対する理論的モデルとしての重要性が認識されるにつれ，単なる feasibility のみならず reconfiguration problem（２つの配置間の遷移可能性問題）およびその遷移ステップ数の定量的評価（計算量解析）についても，多くの研究結果が報告されている．しかしながら，その多くは工学分野への応用を意識してか，reconfiguration（厳密/近似）アルゴリズムの設計とその定性的・定量的分析へとシフトしているようであり，モデルの理論的側面についての研究は殆ど見受けられない．

２．研究の目的

G をボードグラフ，H を碁石同士の（G の辺を挟んでの）交換可能性グラフとする．すなわち，H の各点は G の点上に配置するラベル付き碁石に対応する．2 つの碁石が（G の辺を挟んで）交換可能である場合に限り H の対応する 2 点間を辺で結ぶ．このような（ラベル付）グラフの対(G,H) のことを "Graph Motion on Graphs" モデルと呼ぼう．このモデルはこれまでに挙げた既存のモデル群をすべて包含しており，理論上も，また実際の応用に際しても，その適用範囲はきわめて広い．実は上記の定義において G と H の立場は対称的であり，(G,H) = (H,G) が成立するが，より一般には，G と H の間の"graph motion" 規則等の改変により，G と H の役割に非対称性が生じるなど，上記モデルとは本質的に異なる構造を持つ多くの variation を定義することができる．

本研究の目的は，"Graph Motion on Graphs" モデル及びその variation 達についての様々な理論的考察（極値グラフ理論，代数学的グラフ理論，組合せ最適化理論等に基づく，構造定理群の証明）を行い，併せて関連する様々なグラフ・アルゴリズムを開発し，その定性的・定量的分析を行うことにある．

３．研究の方法

本研究が扱うモデルには理論もしくは応用上の重要性をもつ variation が豊富に存在し，研究の方向性についても，構造定理の解明，計算量解析，アルゴリズム開発等の重要な視点が数多く存在する．本研究では，こうした種々のモデルの特性および研究の視点を比較検討することにより，とりわけ重要(有用)性が高いと思われる課題を選別して，優先的に取り組んだ．

本研究は理論研究であるため，その本質的な部分は研究対象を考え抜くことにあり，その結果をまとめて命題として記述し，発表していくことにある．さらにモデルの特殊な場合について石交換パズルのグラフをコンピュータ画面上に表示し，マウスのクリック操作により石交換動作を可能とするツールを作成し，モデルの解析に援用した．

常に潜在的な複数の検討課題を準備しておき，研究が当初計画どおりに進まない場合には，他の課題に視点を切り替えるなど，柔軟で適切な対処を心がけた．また，研究のより一層の進展を促すため，国内外のしかるべき研究発表の場に積極的に参加した．

４．研究成果

(1) Graph Motion on Graphs の研究

①石交換群の性質

頂点数の等しい２つの単純無向グラフG，Hに対して，Gを盤グラフ，Hを石グラフとする石交換パズルpuz(G,H)を次のように定義する．Gの頂点集合からHの頂点集合への全単射写像fをpuz(G,H)の配置と呼ぶ．配置fにおいて，a=f(v)であるとき，盤の目vを石aが占めている，と解釈する．puz(G,H)の与えられた配置fにおいて，uvがGの辺であり，かつf(u)f(v)がHの辺であるとき，2つの石a=f(u)とb=f(v)を交換することができる．つまり，新たな配置gを，g(u)=f(v)，g(v)=f(u)，xがuとv以外のGの頂点のときg(x)=f(x)と定義すると，fはgに変換できる．この変換をpuz(G,H) の手という．2つのpuz(G,H)の配置f,gについて，有限回の引き続く手によってfからgに変換できるときfとgはpuz(G,H)-同値という．

ここで，G=Hとする．Gの自己同型写像fはpuz(G,G)の配置とみなすことができる．Gの恒等写像とpuz(G,G)-同値な自己同型写像全体はGの自己同型群の部分群となる．これをGの石交換群と呼び，Peb(G)と書く．本研究課題ではPeb(G)の基本的性質を調べ，まず，以下の性質を明らかにした；与えられた群を石交換群とするグラフの存在，グラフの内周と石の交換可能性との関係，２つのグラフのデカルト積の石交換群．

次に，連結グラフの2乗グラフについての石交換群の性質を研究し，特に「定理1．任意の連結グラフGについて，Gの自己同型群はGの2乗グラフG^2の石交換群に含まれる」を証明した．この定理を主定理とする諸結果を，2018年7月にリヨンで開催された「第10回グラフ理論と組合せ論国際会議ICGT 2018」で口頭発表した．定理1の証明のキーとなる補題は「補題2．パスP_nの自己同型群はP_n^2の石交換群に含まれる」であり，定理1は補題2を繰り返し用いることにより証明される．補題2は「パスの反転操作」というグラフ上の新たな操作の重要性を示唆しており，この操作の詳しい研究は今後の研究課題といえる．

②石交換モデルの feasibility

２つのグラフ G,H についてのパズル puz(G,H)について，任意の２つの配置 f,g が puz(G,H)-同値であるとき，puz(G,H)は feasible である，という．G,H のうち一方のグラフが，完全多部グラフ，道グラフ，閉路グラフの場合は，puz(G,H)が feasible になるための必要十分条件は既に得られている．一般の場合の解明は難しい問題であるが，研究の一つの方向として極値問題としてアプローチすることが考えられる．特に，次の予想は未解決である．グラフ G の最小次数を $\delta(G)$と書く．「予想 3．$n\geq3$ とする，G,H は n 頂点の連結グラフであり，$\delta(G)+\delta(H)\geq n+1$ とする．このとき，(G,H)は feasible である．」本研究課題では，ある種の巡回グラフについて予想 3 が成り立つことを確かめた．しかしながら予想 3 の解決には至らなかった．

③石移動モデルの計算量

$0<k<n$ とし，$P=\{1,2,\cdots,n-k\}$ をラベル付きの石の集合とみなす．頂点数 n の盤グラフ G の頂点集合から $P\cup\{0\}$への全射 f で，任意の石 p について |f^{-1}(p)|=1 をみたすものを G 上の P の配置という．

ここで，G の頂点 v について $f(v)=p>0$ であるとき，v の上に石 p が置かれている状態であり，$f(v)=0$ であるとき，v は石の置かれていない空き頂点とみなす．空き頂点の個数は k である．配置 f において，$f(u)=p>0$，$f(v)=0$，かつ uv が G の辺のとき，石 p を u から v に移動することができる．つまり，$g(u)=0$，$g(v)=p$，かつ x が u と v 以外の G の頂点のとき $g(x)=f(x)$，をみたす新たな配置 g が得られる．これをパズル puz(G,k)の手という．任意の配置のペア f，g について，連続する手の有限列によって配置 f を配置 g に変換できるとき，パズル puz(G,k)は feasible である，という．先行研究として D. Kornhauser，G. Miller and P. Spirakis は，この石移動問題が feasible となるための必要十分条件を解決し，さらに，feasible である場合について，任意の配置のペア f，g について，その遷移が高々n^3のオーダのステップ数で達成できることを示した．これに関して，次の予想がある．「予想 4.G が頂点数 n の木の場合には，任意の配置のペア f，g について，その遷移が高々$n^2\log n$ のオーダのステップ数で達成できる」本研究課題では，パスグラフに近い形状の特殊な木について本予想が成り立つことを確かめたが，予想 4 の解決には至らなかった．

(2) コードダイアグラムの展開

①コードダイアグラムの展開数と Tutte 多項式

円における弦の集合で，どの２つの弦もその端点を共有しないとき，その集合をコード ダイアグラムと呼ぶ．位数 n のコードダイアグラム E のすべての弦が互いに交差しているとき，E を n-交差と呼ぶ．コードダイアグラム E が 2-交差 $S = \{x1\ x3,\ x2\ x4\}$ を含むとする．このとき，E の S についての展開 とは，E を新たな２つのコードダイアグラム $E1 = (E - S) \cup \{x2\ x3,\ x4\ x1\}$ と $E2 = (E - S) \cup \{x1\ x2,\ x3\ x4\}$ に置き換えることである．

どのようなコードダイアグラム E についても，それを出発点として展開を繰り返し，非交差コードダイアグラムまで展開し尽くすことができる．このとき，最終的に生成される非交差コードダイアグラム全体の重複集合の位数は，展開の仕方に依らず E のみで決まる．それを E の展

開数と呼び f(E) と書く.

与えられたコードダイアグラム E に対して，それに付随するインターレースグラフをGEと書く．また，与えられたグラフ G に対して，その Tutte 多項式を t(G; x,y)と書く．一般に E の展開数 f(E) は t(GE; 2,-1) で与えられることを証明した．この結果を2017年8月にウィーンで開催された国際会議Eurocomb2017で口頭発表し，会議の論文集に発表した．この内容にさらに以下の②の結果などを追加したものが論文誌 Discrete Mathematicsに掲載された．

②完全多部コードダイアグラムの展開数

具体的なコードダイアグラムEについて，その展開数を求めた．既に先行研究として， Eがn-交差 Cnの場合に，f(Cn)= E(n+1)であることは証明済であった．ここで，$(E(n))_{n\geq 1}$=(1,1,2,5,16,61,252,…)は n次のアップダウン置換の個数であり，オイラー数と呼ばれている． この結果を推し進めるものとして，完全２部コードダイアグラムE m,nの場合に研究し，その展開数f（E m,n）の指数型母関数 F(x,y) が 1 / (cosh x cosh y - sinh x - sinh y) であることを証明した．この結果は2016年7月にスペインのバルセロナ工科大学における研究集会Discrete Mathematics Days - JMDA16 で口頭発表した．さらに，この公式を一般化する完全多部コードダイアグラムの展開数の指数型母関数を得た．

(3) その他

①一般三角形分割に関する研究

凸多角形の内部で互いに交差するｋ 本の辺の集合をk-交差という.2-交差を単に交差という. k, n をｎ ≧ 2k + 1 を満たす正の整数とする．凸ｎ 角形の辺集合Ｅが，(i) (k + 1)-交差を含まず，かつ，(ii) (i) の性質について極大である（つまりＥ にどのように新たな辺を追加しても(k + 1)-交差が生じる）とき，Ｅ を凸ｎ 角形のk-三角形分割という．k-三角形分割に関してはさまざまな興味深い性質が知られている．

本研究課題では，k-三角形分割と k-非交差格子路との１対１対応（この対応は既知のものであった）を詳しく調べて，その対応が「k-三角形分割の出次数列」を用いて精密化されることを示した．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計２件）

① Tomoki Nakamigawa and Tadashi Sakuma, The Expansion of a Chord Diagram and the Tutte Polynomial, Discrete Mathematics, 341, June 2018, 1573-1581.
DOI: 10.1016/j.disc.2018.02.015
② Tomoki Nakamigawa and Tadashi Sakuma, The Expansion of a Chord Diagram and the Tutte Polynomial(Extended Abstract), Electronic Notes in Discrete Mathematics, The European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EUROCOMB'17), edited by M. Drmota, M. Kang, C. Krattenthaler and J. Nešetřil, 61(2017), 917-923.
DOI: 10.1016/j.endm.2017.07.054

〔学会発表〕（計６件）

① Tatsuoki Kato, Tomoki Nakamigawa and Tadashi Sakuma, Pebble Exchange on Graphs and Graph Automorphism, 10th International Colloquium on Graph Theory and combinatorics, July 9-13, 2018 at Université Claude Bernard Lyon.

② Tatsuoki Kato, Tomoki Nakamigawa and Tadashi Sakuma, Pebble exchange group of graphs, 6th Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, November 5-9, 2018 at Okinawa Japan.

③ 中上川 友樹，一般三角形分割の出次数列について，応用数学合同研究集会報告集，龍谷大学，2018年12月.

④ 中上川 友樹, 加藤立隆, 佐久間 雅，グラフの石交換群，応用数学合同研究集会，龍谷大学，2017年12月.

⑤ 中上川 友樹, 佐久間 雅，コードダイアグラムの展開とTutte多項式，応用数学合同研究集会報告集，龍谷大学，2016年12月，86-87.

⑥ Tomoki Nakamigawa, Enumeration Problems on the Expansion of a Chord Diagram, Electronic Notes in Discrete Mathematics, Discrete Mathematics Days - JMDA16, edited by A. de Mier and O. Serra, 54 (2016), pp. 51-56.

〔その他〕（計１件）

① Tatsuoki Kato, Tomoki Nakamigawa and Tadashi Sakuma, Pebble Exchange Group of Graphs, arXiv.org > cs > arXiv:1904.00402

６．研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：佐久間 雅

ローマ字氏名：(SAKUMA, tadashi)

所属研究機関名：山形大学

部局名：理学部

職名：准教授

研究者番号：60323458