

令和 5 年 6 月 7 日現在

機関番号：34419

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2022

課題番号：16K05262

研究課題名（和文）グラフの部分構造の存在を保証する条件の関係性に関する研究

研究課題名（英文）A study on the relation of degree conditions for the existence of substructures in graphs

研究代表者

山下 登茂紀（Yamashita, Tomoki）

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：10410458

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000円

研究成果の概要（和文）：千葉氏との研究で、指定された個数の閉路または道がグラフに存在するための次数条件についてのサーヴェイ論文を執筆した。その過程で千葉氏と、グラフを閉路で分割するための次数和条件に関する結果を3つ得ることができた。Chen氏、千葉氏、Gould氏、Gu氏、斎藤氏、津垣氏との研究で、非隣接2頂点の次数和という観点で、密なグラフには部分構造として密な2部グラフが存在することを証明した。太田氏と千葉氏との研究で、閉路の長さの分布に関する1998年のBondyとVinceの予想および2018年のMaらによる予想の共通の一般化となる結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

小関氏との共著である2008年の論文で、ハミルトン閉路が存在するための次数和条件に関して、その最良の下限は公差が「独立数-1」の等差数列をなすという予想をした。津垣氏、小関氏、千葉氏、古谷氏と共同研究で、未解決であったこの予想を解決し、2019年に論文として掲載された。千葉氏と執筆した、指定された個数の閉路または道がグラフに存在するための次数条件についてのサーヴェイ論文は、2018年1月に国際雑誌に掲載され、2023年5月現在1259回アクセスされていて、11本の論文で引用されている。

研究成果の概要（英文）：Chiba and I wrote a survey paper on degree conditions for the existence of a specified number of cycles or paths in a graph. In the process, we obtained three results on degree-sum conditions for partitioning a graph into cycles. With Chen, Chiba, Gould, Gu, Saito, and Tsugaki, I proved that dense graphs have dense bipartite graphs as substructures in terms of degree sums of non-adjacent two-vertices. In work with Ota and Chiba, I obtained a result that is a common generalization of Bondy and Vince's conjecture on the distribution of cycle lengths (in 1998) and a conjecture by Ma et al. (in 2018).

研究分野：グラフ理論

キーワード：閉路 次数条件

### 1. 研究開始当初の背景

グラフとは、頂点集合と呼ばれる有限集合と辺集合と呼ばれる頂点集合の2元部分集合からなる組である。コンピュータネットワークをグラフとみなすとき、ハミルトン閉路(すべての頂点を含む閉路)はネットワークにおける効率的な巡回診断経路とみなせる。また、全域木(すべての頂点を含む木)はネットワーク構築に重要な概念である。そのため、閉路や木構造に関する研究はグラフ理論において中心話題であり研究も盛んである。

あるグラフに対してハミルトン閉路およびそれに類する閉路や全域木が存在するか否かを判定することは難しく、非自明な必要十分条件は知られていない。そのため、閉路および木構造が存在するための十分条件に関する研究が盛んに行われている。その条件として、位数、次数、連結度、独立数の4つの不変量が重要であることが知られている。

この30年、多くの研究者によって、グラフが閉路や木構造を部分構造として含むための条件が数多く与えられた。しかし残念ながら既存の研究は、条件を弱くしようという方向性のものが多く、その条件間の規則性や関係性を明確にしようとする方向性のものは少なかった。また、部分構造間の関係性に注目した研究も少なかった。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、「グラフに閉路および木構造が存在するための条件の規則性や関係性、さらに、それら定理の関係性を調査する」という既存の研究にはない独自の観点から、どのような条件が本質的であるかを決定することである。具体的には、以下の3つがある。

(1) これまでの結果から、閉路が存在するための「位数、連結度、独立数に関する次数和条件」には規則性があることが予想されていた。ハミルトン閉路に対してこの規則性が成り立つことを示し、それを足がかりにその他の閉路に対しても証明できないか模索する。

(2) ハミルトン閉路や支配閉路などの各構造に対して、連結度と独立数の条件から、次数和条件として考慮すべき頂点数が決定されている。しかし、考慮する頂点数の頂点すべての次数和を取る必要がなく、各構造に対して固有の頂点数が存在して、その次数和が重要となることが予想されていた。多くの部分構造に対してその正当性を示す。

(3) 私は最近、「葉数が制限された全域木に関する定理」が「指定された長さ以上の閉路に関する定理」や「指定された個数の閉路に関する定理」から直接的に導かれることを示した。さらに「指定された2つの頂点集合を結ぶ点素な道に関する定理」が「有向グラフの有向ハミルトン閉路に関する定理」から直接的に導かれることも示した。他にも同様な定理間関係性がないかを調査する。

### 3. 研究の方法

グラフに閉路および木構造が存在するための条件の規則性や関係性、さらに、それらに関する定理の関係性を調査するためには、多くのデータつまり定理や予想が必要である。そのため、膨大に存在する既存の結果の調査を中心に研究を行い、整理してまとめたサーヴェイ論文を作成する。

サーヴェイ論文作成で得られた知識や証明手法を精査した後、上記の「研究の目的」の欄で述べた(1)(2)(3)に関連した研究を、各研究内容に適した、これまで共同研究を行ったことのある研究者と行う予定である。また、状況に応じて、研究グループの組み替えや統合を図ったり、海外の研究者を含めて他の研究者に共同研究に加わってもらったりすることも考えている。

### 4. 研究成果

(1) 千葉氏との研究で、指定された個数の閉路または道がグラフに存在するための次数条件についてのサーヴェイ論文を執筆し、その論文が国際雑誌に掲載された。そのサーヴェイ論文において多くの定理を比較し、それら定理間関係性について述べている。

(2) 千葉氏との研究で、「指定された頂点集合に対して、それらをちょうど1点ずつ含む閉路にグラフを分割するための次数和条件」に関する結果や「2部グラフにおいて指定された完全マッチングに対して、それらをちょうど1辺ずつ含む閉路にグラフを分割するための次数和条件」に

関する結果を得ることができた。特に後者は、「有向グラフにおいて有向閉路が存在するための次数和条件」との関係に注目することで得られた結果であり、そこで得られた知見から「2部グラフにおいて指定された個数の閉路にグラフを分割するための次数和条件」を得ることができた。

(3) Chen 氏, 千葉氏, Gould 氏, Gu 氏, 斎藤氏, 津垣氏との研究で, 非隣接 2 頂点の次数和という観点で, 密なグラフには部分構造として密な 2 部グラフが存在することを証明した。この結果より, 一般グラフにおける閉路が存在するための次数和条件に関する結果が 2 部グラフにおける結果から導くことができることが示された。

(4) 太田氏と千葉氏との研究で, 閉路の長さの分布に関する 1998 年の Bondy と Vince の予想および 2018 年の Ma らによる予想の共通の一般化となる結果を得た。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 14件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Chiba Shuya, Ota Katsuhiko, Yamashita Tomoki	4. 巻 103
2. 論文標題 Minimum degree conditions for the existence of a sequence of cycles whose lengths differ by one or two	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Graph Theory	6. 最初と最後の頁 340 ~ 358
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/jgt.22921	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tsugaki Masao, Yamashita Tomoki, Yashima Takamasa	4. 巻 39
2. 論文標題 Panconnectivity in Bipartite Graphs with Large Degree sum	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-023-02630-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chiba Shuya, Tsugaki Masao, Yamashita Tomoki	4. 巻 345
2. 論文標題 A Chvatal-Erdos condition for the existence of a cycle intersecting specified connected subgraphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 112808 ~ 112808
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2022.112808	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chiba Shuya, Saito Akira, Tsugaki Masao, Yamashita Tomoki	4. 巻 37
2. 論文標題 Spanning Bipartite Graphs with Large Degree Sum in Graphs of Odd Order	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1841 ~ 1858
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-021-02349-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chen Guantao, Chiba Shuya, Gould Ronald J., Gu Xiaofeng, Saito Akira, Tsugaki Masao, Yamashita Tomoki	4. 巻 343
2. 論文標題 Spanning bipartite graphs with high degree sum in graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 111663, 8 pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2019.111663	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 M.Tsugaki and T.Yamashita	4. 巻 77
2. 論文標題 On a spanning tree with specified leaves in a bipartite graph	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Australas. J. Combin.	6. 最初と最後の頁 69-86
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S.Chiba, Y.Egawa, J.Fujisawa, A.Saito, I.Schiermeyer, M.Tsugaki, T.Yamashita	4. 巻 88
2. 論文標題 On 2-factors with a specified number of components in line graphs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)	6. 最初と最後の頁 541-546
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 S.Chiba, M.Furuya, K.Ozeki, M.Tsugaki and T.Yamashita	4. 巻 26
2. 論文標題 A degree sum condition on the order, the connectivity and the independence number for Hamiltonicity	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 P4.53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.37236/5480	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamoto Atsuhiko, Oda Yoshiaki, Watanabe Mamoru, Yamashita Tomoki	4. 巻 341
2. 論文標題 A note on two geometric paths with few crossings for points labeled by integers in the plane	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 1109 ~ 1113
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2017.10.021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chiba Shuya, Yamashita Tomoki	4. 巻 34
2. 論文標題 Degree Conditions for the Existence of Vertex-Disjoint Cycles and Paths: A Survey	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Graphs Combin.	6. 最初と最後の頁 1 ~ 83
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-017-1873-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chiba Shuya, Yamashita Tomoki	4. 巻 32
2. 論文標題 On directed 2-factors in digraphs and 2-factors containing perfect matchings in bipartite graphs	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 SIAM J. Discrete Math.	6. 最初と最後の頁 394 ~ 409
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/16M1108959	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R.Matsubara, H.Matsumura, M.Tsugaki and T.Yamashita	4. 巻 340
2. 論文標題 Degree sum conditions for path-factors with specified end vertices in bipartite graphs	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Discrete Math.	6. 最初と最後の頁 87-95
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2016.07.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chiba Shuya, Yamashita Tomoki	4. 巻 340
2. 論文標題 Degree sum conditions for vertex-disjoint cycles passing through specified vertices	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 678 ~ 690
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2016.12.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chiba Shuya, Yamashita Tomoki	4. 巻 340
2. 論文標題 A note on degree sum conditions for 2-factors with a prescribed number of cycles in bipartite graphs	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 2871 ~ 2877
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2017.07.028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計2件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 山下 登茂紀
2. 発表標題 閉路の存在性に関する定理の関係について
3. 学会等名 日本応用数理学会 2016年度年会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 山下 登茂紀
2. 発表標題 閉路の存在を保證する次数和条件の規則性
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会 2021
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------