

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 7 月 8 日現在

機関番号：35403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05263

研究課題名(和文)固有値によるグラフの特徴付け・分類に関する研究

研究課題名(英文)On Characterisations and Classifications of graphs by their Eigenvalues

研究代表者

谷口 哲至(Taniguchi, Tetsuji)

広島工業大学・工学部・准教授

研究者番号：90543728

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では一般ベータ木の構造やホフマンガフについて取り組んできた。一般ベータ木の構造は階層的で対称的であるが、具体的な固有値を見ることは大変難しい。瀬川氏、久保田氏、吉江氏らと、そのクラスにおけるグローバウォークの周期性について成果を得た。また、ホフマンガフのfat頂点と辺(符号化)についての一般化を行うことで、ホフマンガフと一般的な整格子との対応をつけることができた。これにより、一般的な整格子のingerabilityについて説明することができるようになる。3-格子の同定問題の解決に向けた取り組みの中で、整格子由来の辺符号グラフのライングラフ問題について終着点と言える成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子ウォークや整格子の分類・特徴付けは、量子コンピュータ、代数符号などの発展に貢献できる。量子ウォークの周期性などは、量子探索などビッグデータの発展に寄与できる。また、グラフという構造は代数構造を詳細に表す言葉として重要である。ホフマンガフの一般化を得たことは、これまで整格子の構造の詳細を説明する道具がほとんどなかった中で、大きな成果と言ってよい。

研究成果の概要(英文)：In this project, we have been studying on the structure of a generalized Bethe tree and a Hoffman graph. The structure of a generalized Bethe tree is hierarchical and symmetric, but it is very difficult to see the eigenvalues. With Segawa, Kubota, and Yoshie, we obtained results on the periodicity of the Grover Walk in the class. In addition, by generalizing the fat vertices and (signed) edges of a Hoffman graph, the Hoffman graph and generalized integral lattices can be associated. This makes it possible to explain the ingerability of generalized integral lattices. In problem of classifications of 3-lattices, we obtained the results that can be said to be the final goal on the line graph of the signed graph derived from integral lattices.

研究分野：代数的グラフ理論

キーワード：代数的グラフ理論 スペクトラルグラフ理論 代数的組合せ論

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

スペクトラルグラフ理論はグラフを行列に置き換え、固有値問題として捉える分野である。「カッツの太鼓の問題」で知られるように、一般に太鼓の音(スペクトル)から太鼓の形(グラフ構造)を決定することは極めて難しいと考えられている。しかし、グラフは集合に関係を組み込んだ単純な構造であるので、固有値を通してその構造を知ることが期待できる。これまでの先行研究として、D. Cvetkovic 氏、A. J. Hoffman 氏らの研究が知られている。固有値を制限すれば、グラフの構造も限定的になり、詳細を表すための言葉が多く必要になる。本研究では、ただグラフのスペクトルを見るのではなく、固有値から得られる整数格子や代数体を経由し、グラフ構造の解明を目的とする独創的な研究である。

頂点数が増すと組合せ爆発により、グラフのクラスは膨大な数となり、その構造を詳細に知ることは計算機を用いても困難である。グラフを扱う分野では形状を直接比較するだけでなく、各種不変量を比較することで識別することになる。本研究では、スペクトルに条件を与え、グラフの決定・特徴付け・分類を目指す。以下は、「スペクトルに条件を与えることでグラフの構造を調べる」ことを目指した流れの例である：

・木 (tree) …サイクルを含まないグラフ。一般のグラフで与えられたスペクトルから、グラフを特定することは極めて難しい。そこで、シンプルな構造の一つである木について調べることは自然な流れである。J. Salez 氏は、すべての総実代数的整数が木の固有値として現れることを示した。

・ライングラフ…ライングラフの最小固有値は -2 以上であることが知られており、最小固有値 ≥ -2 のグラフについての先行研究がある。また、Woo 氏、Neumaier 氏らによって一般化が成され、最小固有値が -2 を下回るグラフのクラスについても扱えるようになった。

・距離正則グラフ…与えられた整数の列を固有値としてもつグラフの分類。世界的に広く研究業績が見られる。我々はライングラフの一般化とルート系を用いた研究を行った。通常の正則グラフよりも対称性が強く、アソシエーションスキームとの絡みでよく先行研究が見られる。その対称性の強さから、スペクトルに条件を与えることで容易に特徴付け・分類が出来そうではあるが、一般にはそうではない。

スペクトルを制限してグラフの構造を特定する際に、多くは与えられたグラフの性質を利用して証明を得ている。これだと、木、ライングラフ、正則グラフ等、各々で手法が異なり、統一的手法があるとは言えない。先の研究課題でもルート格子など代数構造を用いた研究もしていた。そこで、代数構造を経由することでグラフを研究するという本研究課題の設定に至る。

2. 研究の目的

ルート格子の一般化である 3-格子 (符号理論で重要な構造) など、これまで難しいと考えられ、あまり注目されなかった代数構造についても価値が高まる。このような代数構造について、代数的グラフ理論やスペクトラルグラフ理論を通して研究できるようにすることが、本研究における目的である。

本研究においては、(グラフそのものが持つ性質を使いつつも)主に代数構造を経由して解決にあたることに特色がある。スペクトルに条件を付与することで、グラフの決定・特徴付け・分類を行い、主に以下の事を目的として研究する：

- (1) これまでは、主に最小固有値 ≥ -3 のホフマングラフの特徴付け・分類に携わってきた。本研究課題では最小固有値に関する一般論を展開する。
- (2) J. Salez 氏の研究では、すべての総実代数的整数が木の固有値として現れることが突き止められている。そこで、単に木 (tree) ではなく、一般ベータ木などの特別な木の固有値にそれらが現れることを突き止める。
- (3) 固有値が \mathbb{Q} 上既約モニック多項式の根であるような距離正則グラフの決定を行う。実際にはとても難しい問題なので場合分けが必要であるが、パラメータなどに制限を与えることで段階的に解決に当たる。

3. 研究の方法

年度ごとに研究計画を立て、課題解決に当たる。この課題解決に向けては、ただ問題を設定して解決するというにとどまらず、研究組織を整えることで、研究集会などを企画・運営し、効率よく本研究及び周辺領域における情報の収集や研究についての役割分担を行う必要がある。

平成 28 年度は主に次の 5 つについて研究を実施した。

- (1) 一般ベータ木の構造について。その構造は階層的で対称的であるが、具体的な固有値を見ることは大変難しい。まずは単純に固有値の観点でその構造を特徴付けることが重要である。そこで、当初の問題よりも少し難度を落とし、実施した。グローバークの周期性は具体的なグラフで確かめられている例が少ないようである。計算機実験を行い、周期性を持つという条件下で、その構造が特徴付けられることの確認を目的とした。
- (2) ホフマングラフの他分野への応用について。これまでグラフの最小固有値による構造を考える上でのみホフマングラフを利用してきた。そもそもホフマングラフはグラフの最小固有値による極限構造を表しているものであり、グラフの最小固有値問題について研究する時に用いることが自然だからである。しかし、ライングラフの一般化などにも用いられている為、応用の幅は広い。(1)の問題を考える上でホフマングラフを用いることもその分野で重要な問題である。ある一般ライングラフで周期性を持つことの確認を目的とした。
- (3) 隣接最小固有値(以降、最小固有値)によるクラスタリングについて、グラフの最小固有値を固定した時、どのようなホフマングラフが在るのかを考えた時に自然と出てくる問題である。Fat 頂点を付け加える作業をするのだが、効率よく付け加えることまでには至っていない。まずは二つに分割することを考えることとした。グラフの固有値、固有ベクトルをみることでその分割が出来るのではないかとということを実験で確認することを目的とした。
- (4) 成果発表、意見交換、情報収集の為に、国内外の会議に参加する。具体的には、2016 年 5 月 21-25 日に京都で開催された国際会議 JCCA 2016 の運営に携わる。ここで、E. R. van Dam 氏 (Tilburg 大学) を招聘し、講演して頂くと同時に研究打ち合わせや情報交換を行った。
- (5) スペクトラルグラフ理論研究は応用分野でも盛んであり、その動機は様々である。互いの存在は認識されておらず、意見交換、情報収集の場が少ない。セミナーや研究集会を開催し、その様な問題の排除を目指す。毎年、研究集会「スペクトラルグラフ理論および周辺領域」を開催している。 <http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~htanaka/docs/sgt4/>

平成 29 年度は主に次の 4 つについて研究を実施した。

- (1) 一般ベータ木の構造について、研究協力者の瀬川氏、吉江氏、久保田氏(三名とも当時東北大)らと、計算機実験で得られた結果が正しいのか研究を進めてきた。一般ベータ木のグローバークの周期性について論文にまとめ投稿することを目指した。
- (2) ホフマングラフの他分野への応用について、瀬川氏とライングラフの一般形というホフマングラフの性質を活かした研究を行っている。構造については既に特徴づけられているので、周期性などが決定できるか、研究を続けた。量子ウォークの研究を特定のグラフのクラス上で行うという研究は、この分野での得意とするところであり、一方であまり進捗がない領域でもある。また、吉野氏(東北大)、久保田氏、古谷氏と最小固有値が $-1 - \sqrt{2}$ 以上であるグラフのクラスの禁止グラフを決定し、論文にまとめ投稿することを目指した。
- (3) 隣接最小固有値によるクラスタリングについては、前年度年から継続して進めているが、計算機実験でも予想している結果の反例が見つかっていない。この研究も継続して進めた。
- (4) ホフマングラフの 3-格子への応用について、禁止グラフを発見し、(ホフマングラフで表現できない)3-格子の例外型を小さいながらも構成できた。これを拡大することで例外型 3-格子を幾つか作った。それらがより次元の高い例外型 3-格子の部分格子になっているのか突き止めることを目指した。

平成 30 年度は主に次の 3 つについて研究を実施した。

- (1) ホフマングラフの他分野への応用について、瀬川氏とライングラフの一般形というホフマングラフの性質を活かした研究を行ってきた中で、有向グラフへのホフマングラフの一般化を考えた。この先行研究は Guo 氏、Godsil 氏に依るものであったが、グラフ同型判定の固有値による判定の精度をさらに高めることに成功した。このことについて論文にまとめ投稿することを目的とした。
- (2) 隣接最小固有値によるクラスタリングについては、見村氏(東北大)、楠木氏(大阪大)と研究を進め、解決を目的とした。
- (3) ホフマングラフの 3-格子への応用について、ホフマングラフの fat 頂点と辺(符号化)についての一般化を行うことで、一般的な整格子との対応をつけることに成功した。整格子の ingerability について説明することができ、かなり大きな進展である。このことについて整格子という代数構造とグラフの間に対応をつけることが可能となり、研究を進めた。

平成 31 年(令和元年)度は主に次の 2 つについて研究を実施した。

- (1) 隣接最小固有値によるクラスタリングについては、見村氏(東北大)、楠木氏(大阪大)と研究を進めた。
- (2) ホフマングラフの 3-格子への応用について、ホフマングラフの fat 頂点と辺(符号化)についての一般化を行うことで、一般的な整格子との対応をつけることができた。これにより、整格子の ingerability について説明することができるようになっている。3-格子の同定問

題は大変難度が高く、どこからスタートするのも重要な議論である。その前段階としての取り組みにより、近年この領域における整格子由来の辺符号グラフのライングラフの議論について、概ね終着点に至ったので論文にまとめ投稿することを目指した。

専門知識の幅が広い本研究課題においては、遂行する為の研究体制構築について力を入れる必要がある。研究代表者（谷口）に加え、以下の研究者達によって構築する：

	氏名	所属	職	専門領域
研究分担	宗政昭弘	東北大学	教授	代数的組合せ論
連携研究	瀬戸道生	防衛大学校	准教授	関数解析
研究協力	Jacobus Koolen	中国科学技術大学	教授	AG,SG 理論
	木村俊一	広島大学	教授	代数幾何学
	溝口佳寛	九州大学	准教授	計算数理学
	田中太初	東北大学	准教授	代数的組合せ論
	瀬川悦生	東北大学	准教授	量子ウォーク理論
	澤正憲	神戸大学	准教授	組合せデザイン
	佐野良夫	筑波大学	准教授	グラフ理論
	須田庄	愛知教育大学	講師	代数的組合せ論
	見村万佐人	東北大学	助教	幾何学的群論

※ AG 理論（代数的グラフ理論）、SG 理論（スペクトラルグラフ理論）

共同研究は主に分担者である宗政氏と協力者である佐野氏と行うこととした。宗政氏はアソシエーションスキーム・符号理論の専門家、佐野氏はグラフ理論の専門家であり、本研究課題の解決に欠かせない。また、Koolen 氏は古くからアドバイスを頂くことが多く、共同研究を行う可能性が最も高い人物である。Koolen 氏は代数的グラフ理論の専門家であり、経験も豊富である。

グラフの固有値に関する問題は多くの分野に散見されるため、情報収集の合理性から多くの研究者に協力をお願いすることになる。田中氏ら 4 人及び研究協力者の佐野氏、瀬戸氏達によって運営する。木村氏は近年、代数幾何学と組合せ論の境界部分に興味をもって研究をしている。そこで、研究代表者が広島に移動してきたことを機会に、広島で組合せ論セミナーを共同で開催することを持ちかけてきた。また、溝口氏は計算を通して組合せ論に興味をもち、我々の分野の研究者と古くからコミュニケーションをとってきた。彼らの専門領域はとても近く、共通部分は多い。その為、共同で情報収集や発信の場を運営することは合理的である。

ただ専門家を集めるという闇雲な研究体制の構築は時間の浪費を生み、上手く研究が進まないという状況を招く。本研究体制は各々の分野の専門家の内、研究代表者と互いに上手く時間の都合をつけて研究を進めることの出来るメンバーで構成した。その専門性も高く、実際、本研究を遂行する上で、最適かつ妥当な布陣と言えるものであった。

また、代数的グラフ理論とスペクトラルグラフ理論の両領域で、固有値に制限をかけてグラフ構造の解明を目指す事が研究目的である。大まかに、代数的グラフ理論での手法は代数構造を用い、スペクトラルグラフ理論では解析的手法をとる。それらを同時に専門とする研究者は多くなく、研究目的との関連性は強いものであった。

4. 研究成果

以下は、本研究期間中に論文にまとめ投稿した研究成果の中で掲載が決まっていなかったもののリストである。

- Sho Kubota, Etsuo Segawa and Tetsuji Taniguchi: Quantum walks defined by digraphs and generalized Hermitian adjacency matrices
- Michitaka Furuya, Sho Kubota, Tetsuji Taniguchi, and Kiyoto Yoshino: The uniqueness of covers of widely generalized line graphs
- Alexander L. Gavriluk, Akihiro Munemasa, Yoshio Sano, and Tetsuji Taniguchi: signed analogue of line graphs and their smallest eigenvalues

本研究課題は代数構造をグラフ構造と対応付けることで、統一的にグラフの固有値問題や代数構造の分類・特徴付を目指すものであった。ガロア群などとの対応には及ばなかったものの、3-格子の分類に挑むに当たり、ホフマングラフの一般化を行うことが出来たのは、たいへん大きな成果だと言って良い。これにより、極端な話ではあるが、ベクトル空間そのものを、グラフ構造的な意味を持つ分解を行うことが可能になった。ここで次なる問題として、「意味ある分解」が生じることとなる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Sho Kubota, Etsuo Segawa, Tetsuji Taniguchi, Yusuke Yoshie	4. 巻 579
2. 論文標題 A quantum walk induced by Hoffman graphs and its periodicity	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 217236
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.laa.2019.05.026	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kubota Sho, Taniguchi Tetsuji, Yoshino Kiyoto	4. 巻 17
2. 論文標題 On graphs with the smallest eigenvalue at least $-1-2$, part III	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Ars Mathematica Contemporanea	6. 最初と最後の頁 555 ~ 579
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.26493/1855-3974.1581.b47	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sho Kubota, Etsuo Segawa, Tetsuji Taniguchi, Yusuke Yoshie	4. 巻 554
2. 論文標題 Periodicity of Grover walks on generalized Bethe trees	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 371-391
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.laa.2018.05.023	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件（うち招待講演 5件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 generalized Hoffman Graph
3. 学会等名 博多ワークショップ
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tetsuji Taniguchi
2. 発表標題 weighted Hoffman Graph
3. 学会等名 9th Slovenian International Conference on Graph Theory - Bled'19 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tetsuji Taniguchi
2. 発表標題 A Generalization of Hoffman Graph
3. 学会等名 Sendai Workshop on Combinatorics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 A Generalization of Hoffman Graph
3. 学会等名 2020組合せ論とその周辺研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 ホフマングラフのその後
3. 学会等名 COS2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 グラフの固有値
3. 学会等名 松江セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 スペクトラルグラフ理論研究における数学ソフトウェアの活用
3. 学会等名 松江セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 スペクトラルグラフ理論研究における数学ソフトウェアの活用
3. 学会等名 数学ソフトウェアとフリードキュメントXXVIII（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 一般ベータ木におけるグローバークの周期性
3. 学会等名 第34回代数的組合せ論シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 一般ベータ木におけるグローバウォークの周期性
3. 学会等名 COS2017
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 グラフの固有値に対する禁止グラフ
3. 学会等名 応用数学合同研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 グラフの固有値に対する禁止グラフ
3. 学会等名 軽井沢グラフと解析研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 スターコンプリメントテクニックと最小固有値が -2 以上のグラフの生成
3. 学会等名 Mathematicaを使った数学
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 あるグラフクラスタリングとグラフの最小固有値
3. 学会等名 組合せ論サマースクール
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 辺符号グラフとホフマングラフ
3. 学会等名 名古屋組合せ論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 A Representation of Hoffman Graphs
3. 学会等名 代数・解析・幾何学セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 ホフマングラフ
3. 学会等名 代数的組合せ論「仙台勉強会」（招待講演）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	宗政 昭弘 (Munemasa Akihiro) (50219862)	東北大学・情報科学研究科・教授 (11301)	
研究 協力者	佐野 良夫 (Sano Yoshio) (20650261)	筑波大学・システム情報系・准教授 (12102)	
研究 協力者	瀬川 悦生 (Segawa Etsuo) (30634547)	横浜国立大学・大学院教育強化推進センター・准教授	