

令和 2 年 7 月 2 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05271

研究課題名(和文) 界面ダイナミクスに現れるサポートの分離・併合に対する数値解析

研究課題名(英文) Numerical analysis for support splitting and merging phenomena appearing in the interfacial dynamics

研究代表者

友枝 謙二 (Tomoeda, Kenji)

京都大学・情報学研究科・研究員

研究者番号：60033916

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：「蒸発と拡散及び境界上に周期的流入・流出を伴う流れの浸透領域(サポート)の変化」について 次のような 空間2次元領域での数値結果が得られた。

(1) 固定境界条件において 数値解は定常解へ収束する。その過程で 数値解のサポートの分離 即ち 連結集合から非連結集合への形状変化が現れる。これはモデル方程式の解の零点集合の出現を意味する。(2) 境界条件に十分長い周期性を課すると その数値解には零点集合の出現・消滅が繰り返される。(3) 一方 十分短い周期性を課すると 零点集合が出現しない。

これら(1),(2)について数学的証明を与えた。更に(3)では その現象を再現する特殊解を構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

「蒸発過程での浸透領域の変化」とは 海に囲まれた島の内陸部では分布する流体の蒸発と拡散及び島の周囲からの海水の浸入・流出によって引き起こされる現象である。現実の現象は極めて複雑であるので その第一歩として最も簡単な数理モデルを構築し その定性的な性質を調べるといふ基礎研究に着手した。その結果 周期的な潮位による浸入・流出によって 浸透領域が島全体に分布したり又は 一部に非浸透領域が現れることが数値・数学解析の観点から得られた。これは地域を浸入水から守る意味での知見として意味があるのではないかと思われる。

研究成果の概要(英文)：In this study we have the following numerical results, which is concerned with the realization of the behaviour of the non-stationary seepage governed by non-linear diffusion and evaporation.

(1) Imposing the constant value on the boundary condition, we observed that the numerical support which is a simple connected domain changes into a non-connected domain as the time increases. This means the appearance of the zeros of the solution of the model equation. (2) Imposing the sufficiently long period on it, we obtained the phenomena of the repeated appearance and disappearance of the zeros. (3) On the other hand, imposing the sufficiently short period on it, we didn't observe the appearance of the zeros.

We proved the phenomena stated above from the mathematical point of views.

研究分野：数値解析

キーワード：数値解析 差分法 界面ダイナミクス サポート分離併合 零点集合の挙動

## 様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

自然界では相異なる物理状態の境界面 (Interface) に、時々刻々と変化しながら複雑なパターンが現われる。このような現象は界面ダイナミクスと呼ばれ、そのパターンは時間経過とともに複雑な形状を示す。本研究では、その一つとして

#### 蒸発過程での浸透領域の変化

を扱う。これは、海で囲まれた島の内陸部では蒸発と拡散、その周囲では潮位の周期的変化によって引き起こされる海水の浸透領域を調べることに通じる。干満の周期と潮位によっては、島は水没することも考えられる。本研究では、このような現実問題の基礎研究として、蒸発と拡散とによる相互作用に潮の周期的干満という境界条件を課した時、その浸透領域の変化即ちサポートのダイナミクスを数値的に再現することに焦点をあてることにした。

この現象の最も簡単な空間 2 次元モデルは、吸収項を伴う多孔性媒体中の流れを記述する非線形拡散方程式 (porous media equation)

$$(*) \quad v_t(t, x) = \Delta v^m - cv^p \quad (m > 1, c > 0, 0 < p < 1)$$

で与えられる。この方程式の研究は 1970 年代に始まり、解の存在と一意性の他には、有限時刻内消滅、サポートの有限伝搬性と比較定理程度であった。1980 年に入ると Kersner(1980) によって空間 1 次元の初期境界値問題においてサポートの分離が示された。しかし空間 2 次元におけるサポートの挙動については議論されていなかった。

科研費基盤研究 (C)(2011-2014 年) によって空間 1 次元の初期値問題及び初期境界値問題ではサポートが分離・併合、更にその繰り返し現象を引き起こすような初期関数と境界条件をそれぞれ構成する事ができた。更に空間 2 次元では流体の初期分布、境界条件の与え方によってより複雑なサポートの挙動が現われることが期待された。しかし空間 1 次元の時と同じように空間 2 次元でのサポートの挙動についての結果は研究開始当初得られていない状態であった。

### 2. 研究の目的

本研究では、“蒸発と拡散を伴う流れに現れる浸透領域の変化” を数値的に再現する事に焦点をあてる。具体的には、非線形拡散方程式 (\*) を用いて周期的流入・流出を伴う境界条件を課した時に現れるサポートの分離・併合即ち連結集合から非連結集合更に連結集合への変化またはその反復性について扱い、このような現象の発生メカニズムを解明する数値計算法を構築する。同時にその数学解析をも確立する。以上の結果を踏まえて本研究では以下のことを考察した。

初期値問題) 初期関数のサポートの形状によっては時間発展とともに解のサポートが非連結集合または連結集合になる。即ち零点集合 (非浸透領域) の出現とその消滅の繰り返しが期待される。

初期境界値問題) 初期値問題で期待される現象が境界からの流入・流出によってどのように変わるかが興味の対象である。特にサポートが領域全体を覆うか否か、更に周期  $\omega$  を持つ境界条件に対してはサポートの拡張収縮、その過程での連結集合から非連結集合及びその反復性、 $\omega$  を小にするとサポートは連結集合のままか又は非連結集合のままか、これらいずれかが予想される。

本研究では、数学解析だけでは予測できないような性質を見つけ出し解明できるような数値計算法を開発する。以下の事を目的とした。

- (1) サポートの挙動を再現する数値計算法の構築とその安定性と収束性の数学的証明。
- (2) サポートが非連結集合に変化する時の初期形状の性質を数値的に探す。
- (3) (1) で構築した計算法でパラメータ  $\omega$  とサポートの非連結・連結現象との関係を調べる。
- (4) (2) と (3) で得られた性質について数学的証明を与える。

### 3. 研究の方法

本研究で扱うサポートの挙動は空間 2 次元の非線形双曲型に現れる衝撃波に沿って伝搬する。この衝撃波を数値的に解くには Riemann 問題を解く計算プログラムの構成が必要となる。このアルゴリズムは非常に複雑であるので研究代表者の他に 2 名の連携研究者の協力の下で遂行した。

#### [平成 28 年度の計画]

(1) 蒸発過程での浸透領域の変化の数値モデルについて、Operator splitting method に基づいた計算法を以下の項目に留意して構成した。

- ① サポート追跡のためにこの計算法では不等間隔メッシュを採用。
- ② 不等間隔メッシュ上での非線形双曲型方程式に対する Riemann 問題の数値解法作成。

#### [平成 29 年度の計画]

- (1) 数値データから安定性と収束性を確認。
- (2) どのような形状の初期サポートが非連結集合に変化するか否かについて数値的検証。
- (3)  $t \rightarrow \infty$  に相当する数値データから定常解のサポートの形状の調査。

#### [平成 30 年度の計画]

- (1) 次の2点を数値計算による調査。
  - ① 周期の長い境界条件の場合には、サポートは連結・非連結集合を繰り返すか否か。
  - ② 周期の短い境界条件の場合には、サポートは非連結のままか否か。
- (2) (1)で蓄積された数値結果から現象論的に興味深い性質を探す。
- (3) (1),(2)で得られた結果について数値的検証を行う。

[平成31年度(最終年度)の計画]

- (1) 前年度までに得られた現象の発生メカニズムについて、数学的証明。
- (2) **Operator splitting method**の応用範囲を調べる。
- (3) 海に囲まれた島の内陸部の浸透領域の変化と本研究の成果との比較。
- (4) 以上を通して4年間の研究成果を纏める。

#### 4. 研究成果

- (1) 構成した数値計算法即ち差分法については“空間メッシュ幅をゼロに収束させた時差分解の安定性と真の解への収束性が数値的に検証された。
- (2) 定常解  $\Delta v^m = cv^p$  を満たす解の存在・一意性 (Gilbarg and Trudinger(1977)<sup>③</sup>) は既に確立されていたが境界条件と解のサポートの形状との関係については結果は得られていなかった。本研究では考察する領域全体が解のサポート(浸透領域)に覆われる場合(解の零点集合の消滅)とそうでない場合(零点集合の出現)を、特殊解を構成し比較定理を用いることによって示す事が出来た。
- (3) 以下の事が計算結果から得られた。
  - ① 固定境界条件を与えた時は定常解は一意的に存在し時間  $t$  を無限大にすると解は(2)で述べた定常解にそれぞれ収束する。更に“安定化”が数学的にも証明された(図1参照)。
  - ② 境界条件に周期性を課すると十分長い周期に対して零点集合の出現・消滅の繰り返しが現れる(図2参照)。これも数学的に証明することができた。
  - ③ 境界条件の周期を十分短くすると零点集合が消滅したままの数値例が得られた(図3参照)。このような現象が可能となるような境界条件を比較定理と Galaktionov-Vazquez(1994)<sup>①, ②</sup>の特殊解を用いて数学的に構成する事が出来た。
- (4) 研究で得られたサポートの挙動と現実の潮汐の挙動とについては定性的な整合性はあるがまだ隔たりがある。

全研究期間を通しての成果は4回にわたる国際会議にて発表し研究成果(1)および(3)の①と②については“Behaviour of the support of the solution appearing in some nonlinear diffusion equation with absorption”の標題で雑誌論文として2017年に発表した。現在研究成果の(2)と(3)の③についての論文を準備中である。

<引用文献>

- ① V. A. Galaktionov and J. L. Vazquez, Commun. in Partial Differential Equation., **19**(1994), 1075–1106.
- ② V. A. Galaktionov and J. L. Vazquez, Ibid., **19**(1994), 1107–1137.
- ③ D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equation of Second Order, Springer, (1977).

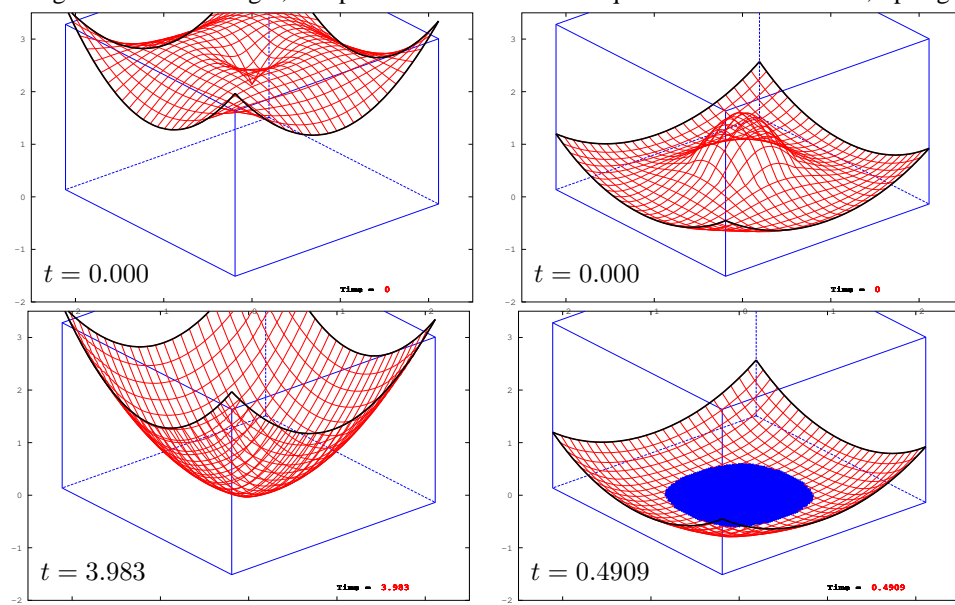


図1: 零点集合(非浸透領域)(青色)の非出現と出現現象, 右側では  $t = 0.4909$  の状態が以後計算終了する  $t = 3.972$  まで続く。

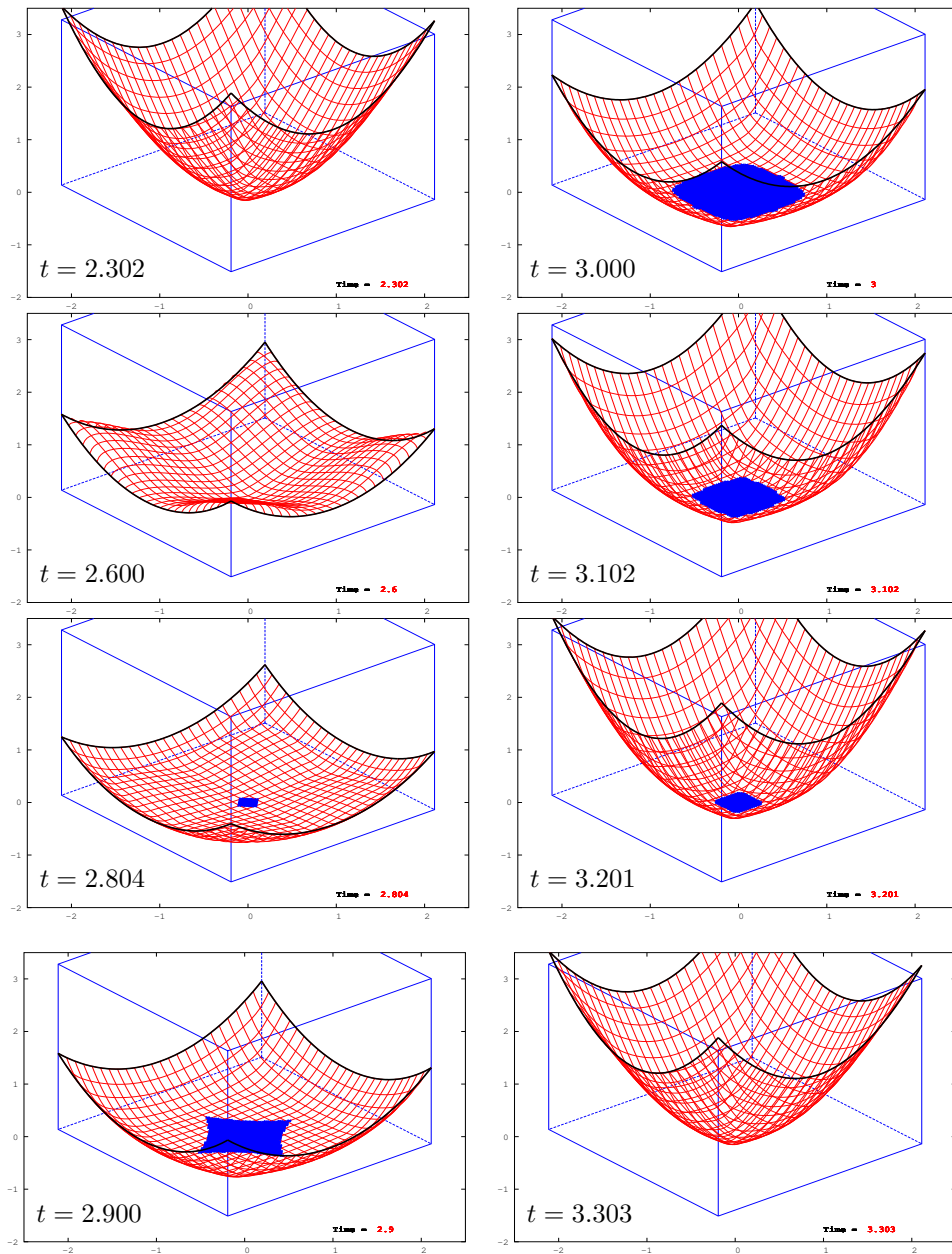


図 2: 零点集合の出現と消滅の繰り返し現象

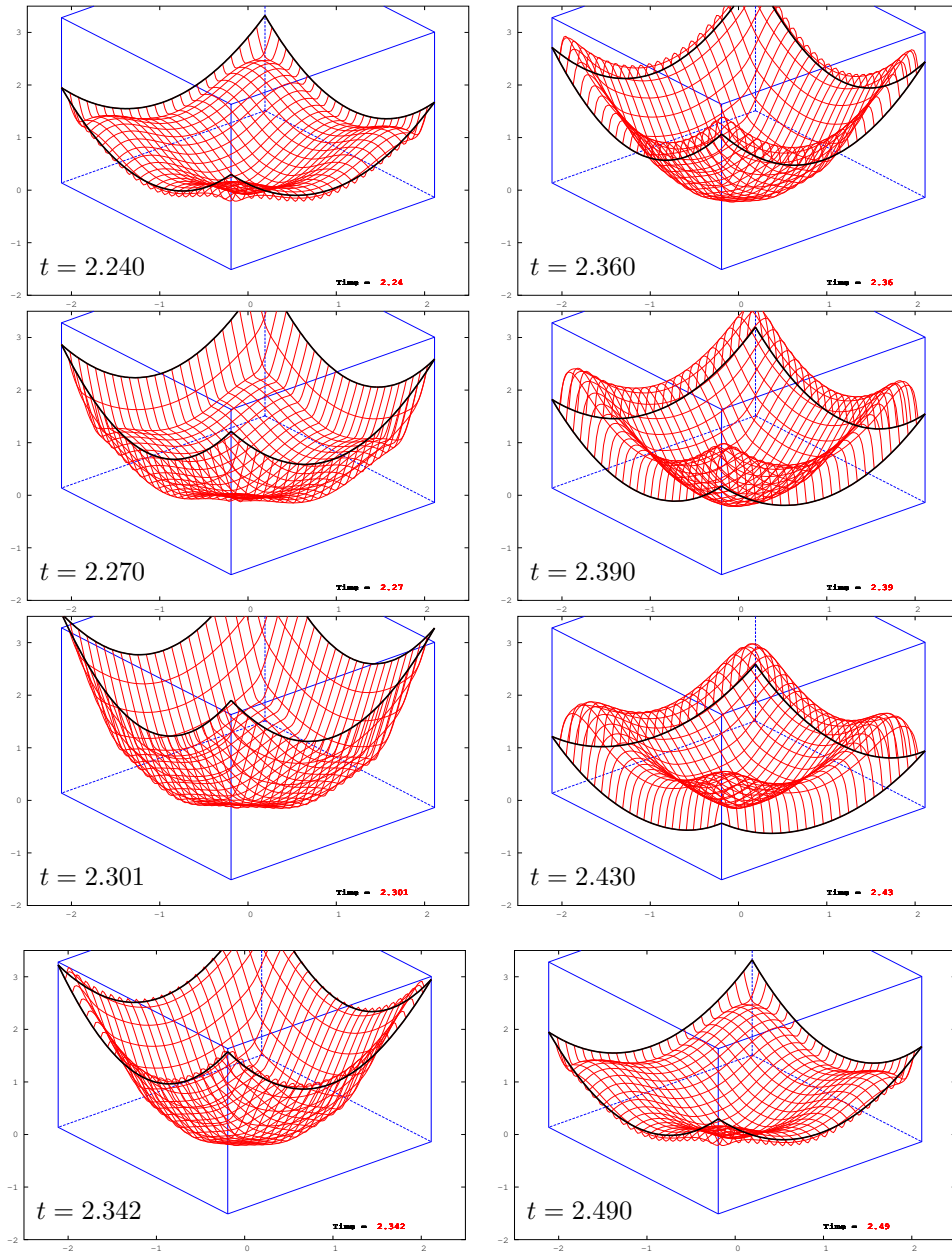


図 3: 零点集合の非出現現象

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kenji Tomoeda	4. 巻 EQUADIFF 2017
2. 論文標題 Behaviour of the support of the solution appearing in some nonlinear diffusion equation with absorption	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of EQUADIFF 2017 Conference, Published by Slovak University of Technology, SPEKTRUM STU Publishing	6. 最初と最後の頁 359-368
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 0件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Kenji Tomoeda
2. 発表標題 Appearance and disappearance of the region infiltrated with fluid in an absorbing medium
3. 学会等名 International Conference Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2018, Noto-cho, Japan（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kenji Tomoeda
2. 発表標題 Appearance and disappearance of the region occupied by the flow through a boundary
3. 学会等名 ANZIAM (Australia and New Zealand Industrial and Applied Mathematics) 2019, Nelson, New Zealand（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 友枝 謙二
2. 発表標題 Van der Pol方程式とその真空管回路 ~ そのモデル化の背景 ~
3. 学会等名 北陸応用数理研究会 2018, 石川県政記念しいのき迎賓館, 金沢
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kenji Tomoeda
2. 発表標題 Support splitting and merging phenomena in the solution of porous media equations
3. 学会等名 International Seminar on Applied Mathematics for Real-world Problems II, Hokkaido University (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 友枝謙二
2. 発表標題 吸収項を伴う多孔性媒体流における浸透領域の分離・併合について
3. 学会等名 研究集会「数値解析の理論と実践」, 石川県政記念しいのき迎賓館, 金沢
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kenji Tomoeda
2. 発表標題 Behaviour of the support of the solution appearing in some nonlinear diffusion equation with absorption
3. 学会等名 Equadiff 2017, Slovak University of Technology in Bratislava, Slovakia. (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kenji Tomoeda
2. 発表標題 Numerical approach to the repeated appearance and disappearance phenomena of non-infiltrated area with fluid through porous media
3. 学会等名 9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics - ICIAM 2019, Valencia University, Valencia, Spain. (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	藤原 宏志  (Fujiwara Hiroshi)  (00362583)	京都大学・情報学研究科・准教授   (14301)	
連携研究者	今井 仁司  (Imai Hitoshi)  (80203298)	同志社大学・理工学部・教授   (34310)	