

令和 2 年 5 月 28 日現在

機関番号：34416

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05284

研究課題名(和文)ファイナンスの数理モデルにおけるゲーム論的問題

研究課題名(英文)Game theoretical problems in mathematical models for finance

研究代表者

長井 英生 (Nagai, Hideo)

関西大学・システム理工学部・教授

研究者番号：70110848

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：ファイナンスの問題の数理モデル化に際し、モデルが現実の現象を正確に表現されているかどうか不確かな場合がしばしば現れる。本研究では、ダウンサイドリスク最小化問題を、モデルの不確かさを容認した設定でモデル化し、解析することとした。そのとき、モデル化に際して、不確かさの度合いをパラメータ付けることにより、確率微分ゲームの問題としての定式化を行った。また、一方、定式化された、その問題の解析に際しても、ゲーム論的な考察が、有効に働く事が明確になり、そうした研究を遂行した。最適投資・消費問題の解析においても、同様の考察が有効であった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

保有総資産がベンチマークを下回る確率を時間大域的に最小化する問題を定式化するにあたって、ベンチマークを確率過程として定式化したことは、現実のファイナンスモデルが持つ問題をよく反映したものであり、さらに、モデルの不確かさを容認した設定で考察したことは、応用に良く貢献すると思われる。また、モデル化された問題の解析に当たっては、数学解析の上でも、大偏差理論を、大偏差確率制御理論として発展させるという、理論的な貢献も評価されるものと思われる。

研究成果の概要(英文)：In mathematical modelling of financial problems, we often wonder whether the model set up is correctly representing the actual financial phenomena or not. In this study, we formulate the problems of down-side risk minimization under model uncertainty as certain kinds of stochastic differential games by parameterizing the extent of uncertainty. Then, in the analysis of the problems set up as above we encounter the situation such that the game theoretical consideration work well and performed such analysis. It is also the case in studying the optimal investment and consumption problems.

研究分野：確率論(確率制御理論)

キーワード：ダウンサイドリスク最小化 モデルの不確かさ 最適消費・投資 HJB 方程式 大偏差確率制御

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

資産価値過程の増大度がある目標値を上回る確率を時間大域的に最大化(アップサイドチャンス最大化)する問題を、大偏差原理と関連付けて論じた Pham の仕事以来、関連する研究が相次いだ。この場合は、結果的に大偏差原理でよく知られる Gärtner-Ellis の定理に帰着されるということが知られ、この定理の仮定となっている条件を判定するために、リスク志向的な場合のリスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題の非崩壊の条件を調べる事が主要な問題となった。一方、資産価値過程の増大度がある目標値を下回る確率を時間大域的に最小化(ダウンサイドリスク最小化)する問題に関しては、状況が異なることが明確になっていた。この問題では、対応するリスク回避的な場合のリスク鋭感的確率制御問題のエルゴード型 H-J-B 方程式と、その方程式の解のリスクパラメータに関する微分が満たす方程式、の両者の解析を行うことが必要となるという新たな展開が生じ、その解析を実行する事で大偏差確率の下からの評価が得られた。そして、これが、問題の本質であることが明確になり、真に大偏差確率制御と呼ぶにふさわしい問題であるという認識が得られていた。同時にここでは、エルゴード型確率制御とエルゴード型 H-J-B 方程式、時間大域的確率微分ゲームとエルゴード型 Isaacs 方程式の関係を、ある程度一般的に論じておくべき動機づけが派生した。ここに至り、一旦、市場の数理モデルから離れて、ある程度一般的な枠組みの下で、制御項を含む半マルチンゲール汎関数の大偏差確率の評価を得る問題を、大偏差確率制御問題として定式化し、解析できないであろうかという着想の下で、その研究を遂行した。さらに、“モデルの不確かさ”を容認した設定で、ロバストな解を求める問題を、数学的に厳密に定式化し、その解法を求める事が多くの研究者の関心を呼んでいる状況下であることを踏まえ、上のような一般的な定式化の上で、“モデルの不確かさ”を容認した設定を考え、制御項を含む半マルチンゲール汎関数の大偏差確率のロバストな評価を得る問題を考察していた。

2. 研究の目的

本研究では上記の状況を踏まえて、(1)再度、市場の数理モデルに立ち戻り、現実的なモデル設定を考察しなおし、妥当と思われる確率微分ゲームの定式化を行い、解析し、不確かさの程度を、計量化する。そのうえで、市場のデータをもとにモデルの妥当性を検証する。また、消費を考慮に入れた最適投資・消費問題についても、不確かさを容認した市場モデルの設定で考察する問題があり、この問題も重要な問題と考えられ、これは、申請者の研究を下にして研究を遂行する。

(2)非完備な市場の数理モデルにおけるポートフォリオ最適化問題に対して、マルチンゲール法に基づく一連の研究が知られている。そこでは、仮想的な市場の完備化による方法がとられ、ある条件下では、完備な市場と同様に、双対法によって最適戦略の理論的構成が行われる手続きが示されている。しかしながら、そこで仮定されている条件が検証可能な場合は限られていて、現実的な問題の解決には程遠いものとなっている。一方、効用関数がべき型の場合には、一般的なリスク鋭感的確率制御の H-J-B 方程式の解析的な研究の成果として申請者の研究がこの場合に適用可能となっており、それに基づいた研究が遂行されている。しかしながら、一般的な効用関数の場合には適用されず、未解決問題として残されている状況となっている。本研究ではマルチンゲール法において用いられた仮想的な市場の完備化の方法を、確率微分ゲームの問題として定式化することにより、H-J-B 方程式の解析に結びつけ、そのことによって、一般的な効用関数の場合まで適用可能な理論を構築することを目指すものである。

3. 研究の方法

畑宏明氏、S.J. Sheu 教授とは頻繁に研究情報交換、セミナー等を行ってダウンサイドリスク最小化の研究の進展状況を確認しあっている。申請者が、独自に行った研究も踏まえて、一旦市場の数理モデルから離れた設定で、ロバストな大偏差確率の評価の研究を行って本研究の準備を整えていた。一方、畑氏と Sheu 教授は申請者の研究と密接に関連する研究を行って、論文を作成中であった。このような状況において、不確かさを容認した設定で、市場の数理モデルを定式化したうえで、ダウンサイドリスク最小化問題の研究を遂行するには、畑氏、Sheu 教授との研究連絡を行うことは極めて有益であると思われ、Sheu 教授との相互訪問を行い、また畑氏を交えて、研究打ち合わせ、セミナーを行った。

具体的な市場の数理モデルに不確かさを容認した設定で考察しなおす研究、ならびに、彼らが準備中の研究を下にして、不確かさを容認した設定で考察する研究をまず遂行した。次に、上で考察した不確かさを容認した市場モデルの設定が、消費を考慮に入れた最適投資・消費問題に適用可能となるかどうか、畑氏、Sheu 教授との研究打ち合わせで討議した。申請者は最適投資・消費問題に関する研究を行っているが、これは先行する畑氏 Sheu 教授の共同研究と密接に関連するものであり、彼らとの討議・情報交換は特に有益であると思われた。ここではべき型期待効用関数の場合が考察されており、ダウンサイドリスク最小化を考える際の双対問題であるポートフォリオ最適化問題と類似した評価関数であるため、密接な関連があると考えられ、彼らと連絡を密にとり研究を進めた。

4. 研究成果

(1) ファクターモデルと呼ばれる、一般的な非完備市場モデルに対して、資産価値過程が、ベンチマークとして予め定められた確率過程を下回る確率を、時間大域的に最小化する問題を考察し、それを、大偏差確率制御問題として定式化した。結果、レート関数の有効領域にベンチマークが安産資産過程の場合との顕著な違いが、レート関数の有効領域の広がりとして現れることを見出した。また、漸近的最適化確率を導く際の原理を明確化することができた。

(2) 上記問題を、不確かさを容認したモデルで考察し、確かさを反映するパラメータを導入することによって、(1)と並行した議論が成立することが示された。その際、不確かさの度合いに応じてレート関数の右端点が左にずれること、左端点は、不確かさを要因しない場合と変わらないことが明確になった。結果、不確かさの程度に応じて大きくなるリスクの程度は、レート関数の右端点が左にずれる大きさとして反映されることが明確になった。

(3) 一般的な非完備市場モデルにおいて、最適投資・消費問題のべき型期待効用問題のHJB方程式の解を求め、その解から、最適投資・消費戦略を構成した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件／うち国際共著 1件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hiroaki Hata, Hideo Nagai and Shuenn-jyi Sheu	4. 巻 56
2. 論文標題 An optimal consumption problem for general factor models	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Control and Optimization	6. 最初と最後の頁 3149-3183
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1137/17M1135864	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 8件／うち国際学会 8件）

1. 発表者名 Hideo NAGAI
2. 発表標題 Large deviation control and an optimal investment model
3. 学会等名 IMA workshop on stochastic control, computational methods and applications（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hideo NAGAI
2. 発表標題 Ergodic Control, Risk-sensitive Control and Large deviation Control
3. 学会等名 Workshop on Stochastic in Honor of Professor Shuenn-jyi Sheu（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hideo NAGAI
2. 発表標題 Large deviation control and the effective domains of the rate functions
3. 学会等名 International Conference on Mathematical Finance and Symposium on the Role of Mathematical Finance on Fin. Tech Business（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Nagai, Hideo
2. 発表標題 Downside risk minimization against a benchmark
3. 学会等名 5 - th Asian Quantitative Finance Conference at Seoul, Korea (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Nagai, Hideo
2. 発表標題 Large deviation control arising from downside risk minimization against a benchmark,
3. 学会等名 Stochastic Analysis and its Applications, at Bedlewo, Poland (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 長井 英生
2. 発表標題 Large deviation control for quadratic semi-martingale functional
3. 学会等名 2017年日本数学会年会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 長井 英生
2. 発表標題 Large deviation control under model uncertainty
3. 学会等名 2017年日本数学会年会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hideo Nagai
2. 発表標題 Large deviation control arising from risk minimization
3. 学会等名 Workshop on Stochastic Analysis and Financial Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hideo Nagai
2. 発表標題 Large deviation control under model uncertainty,
3. 学会等名 SIAM Conference on Control and its Applications, 'Stochastic control in Finance and Insurance', at Chengdu, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hideo Nagai
2. 発表標題 Structure of HJB equations ruling over large deviation control
3. 学会等名 "Probability, Uncertainty and Quantitative Risk", Shandong University at Weihai Campus, Weihai, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----