様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月　７ 日現在

機関番号：３５４０６
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５２８５

研究課題名（和文）連続体における特異点集合の形状最適化問題の理論と応用

研究課題名（英文）Theory and applications of shape optimization of singular points in continuum

研究代表者
大塚　厚二（Ohtsuka, Kohji）

広島国際学院大学・情報文化学部・教授

研究者番号：３０１４１６８３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：破壊力学でのエネルギー解放率、そして連続体の形状感度解析を包含する計算量として一般J積分を考案し、最適形状を求める畔上教授（分担者）によるH1勾配法と結びつけることで「偏微分方程式境界値問題での特異点集合の形状最適化問題」の定式化と解法を導いた。特異点形状最適化の対象は、混合境界を含む境界形状、亀裂形状、不連続係数での界面であり、評価関数としてはエネルギー、平均コンプライアンス、平均2乗誤差、固有値などが使える。汎関数の形状感度解析は物質微分を含む項と初期形状による形状微分に分かれるが、分担者の木村教授（分担者）は最小値問題における形状感度解析については物質微分を含む項が消えることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
工学において，破壊力学，形状最適化，界面形状最適化は重要な問題であり，独立して研究されてきた．本研究によりこれらの分野を統合する偏微分方程式境界値問題の特異点集合形状最適化問題に関する理論が構成でき，有限要素法を使った数値計算も容易であることが示せた．一般J積分は筆者が考案したものであり，理論の拡張も主に筆者が行ってきたことから国内外において同様な研究はない．

研究成果の概要（英文）：The author devise a general J-integral(GJ-integral) as an amount of energy release rate in 3d-fracture mechanics and computational complexity including shape sensitivity analysis of continuum. We combine GJ-integral with the H1 gradient method by Professor Azegami (member of the project) to find the optimal shape. The formulation and solution of “shape optimization problem of singular points in boundary value problem” are derived. The shape optimization of singular points is the optimization of boundary shape including mixed boundary, crack shape, and interface at discontinuous coefficient with cost functions (energy, average compliance, mean square error, eigenvalue, etc.). Although functional shape sensitivity analysis is divided into terms including material derivatives and shape derivatives due to initial shapes, Professor Kimura (member of the project) has shown that terms including material derivatives disappear for shape sensitivity analysis in the minimum value problem.

研究分野：数理工学

キーワード：偏微分方程式境界値問題　変分法　特異点　形状最適化　有限要素法　破壊力学　界面問題　数理モデル

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９、CK－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

変分法の分野で有名な形状感度解析として，Hadamard の変分公式と呼ばれる「領域形状に関する Green 関数の変分公式」がある．申請者は２次元破壊力学での重要パラメータであるＪ積分を３次元に拡張した一般Ｊ積分を 1981 年に提案し，形状感度解析の基礎と成り得る一般Ｊ積分理論を構築した．一般 J 積分は，領域Ωで定義された偏微分方程式境界値問題における解 u に対して，ベクトル場μと任意の開集合ωをパラメータに持つ積分形式 Jω(u,μ) で定義され，Jω(u,μ)＝ Pω(u,μ)＋ Rω(u,μ) となり，Rω(u,μ)は u が弱解で有限となるが，Pω(u,μ)は u の滑らかさが必要となる．1982 年の論文(数理研講究録(462))では一般Ｊ積分と Hadamard の変分公式とを結びつけ，一般Ｊ積分が亀裂だけでなく混合境界値問題での異なる境界での接合部における特異性も含む感度解析を扱えることに気が付き，1985 年の論文“Generalized J-integral and its applications --Basic Theory--”(Japan J.Applied Math.,2) では種々の楕円型境界値問題・システムに対する形状感度解析での道具となる様に一般Ｊ積分を関係式☆「エネルギーの形状感度　－Rω(u,μ)」を中心に統一理論を展開してきた．木村教授(分担者)との共同研究により，非線形問題や界面問題についても関係式☆を証明できた(Japan J. Indust. Appl. Math. (2012) 29:23–35).

その後，畔上教授(分担者)が考案した H1 勾配法を用いることで，エネルギーを最適にする形状を探索できることを 2009 年の数学会で発表した．例えば，ディリクレ境界条件でのエネルギー最小化最適化では変分問題 b(μ,η)＝RΩ(u(Ω),η) の解μを使ってΩより十分小さな数εを取ることで最適な形状Ω(μ)＝ {x+εμ(x)：x はΩにおける点} を得ることができる．なお，b(μ,η)はベクトル値ポアソン方程式のディリクレ積分に２乗積分による内積を加えた 2 次形式である．

一般 J 積分＋H1 勾配法による形状最適化は，平均コンプライアンス最小化問題，最小２乗平均誤差問題などにも適用できる．本方法は，破壊問題，(混合境界を含む)境界形状最適化，界面形状最適化などに適用できることから，通常の形状最適化と区別するため一連の問題を「偏微分方程式境界値問題の特異点集合形状最適化問題」と名付けることにした．数値計算については，パリ第 6 大学の F.Hecht 教授が中心になって開発している有限要素計算システム FreeFem++を用いた．なお，筆者は FreeFEM プロジェクトの共同研究者として関係しており，著書「有限要素法で学ぶ現象と数理 －FreeFem++数理思考プログラミング」を高石教授(分担者)と著している．

関係式☆は，3 次元破壊問題における関係式「エネルギー解放率＝一般 J 積分」を拡張したもので，偏微分方程式境界値問題の特異点集合形状最適化問題における基本となる．さらに，一般 J 積分での重要な性質☆「解 u がω∩Ω内部で正則なら，任意のベクトル場μに対して Jω(u,μ)＝0」を使うことで，解と u が特異点を持つ場合でも関係式☆から出発し，性質☆を使うことで特異点の形状感度解析の理論的考察ができる．

２．研究の目的

(1) 従来の研究を，偏微分方程式問題の特異点集合形状最適化問題における解法として整理する．境界値
(2) 形状感度解析では，形状Ωを微小変形Ω＋δΩさせるが，Ωで定義された偏微分方程式境界値問題での許容関数集合 V(Ω)とΩ＋δΩでの許容関数集合 V(Ω＋δΩ)とを Mapping Technique で繋いで関係式☆を証明してきた．しかし非圧縮性流体では，流速の発散がゼロとなるが，Mapping Technique では条件「流速の発散がゼロ」を保つことが出来ない．とりあえず Stokes 問題に対して一般 J 積分を導出して関係式☆を導く．
(3) 偏微分方程式境界値問題の固有値λ(Ω)に対する形状感度を一般 J 積分で表す．

３．研究の方法

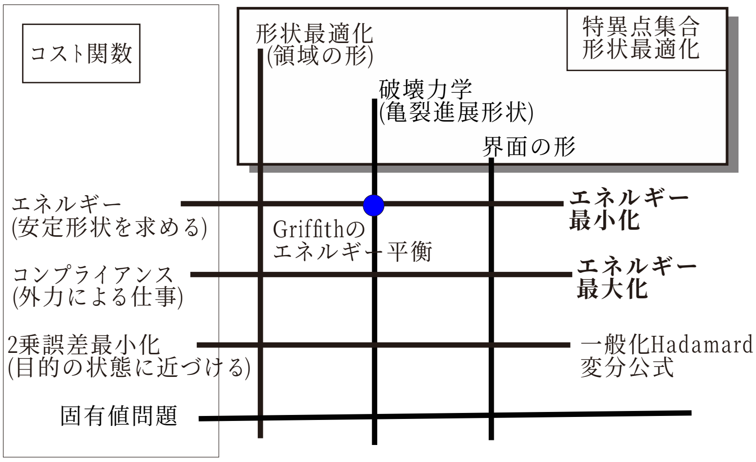
上記の(2)については，V.A. Kovtunenko 教授(オーストリア Graz 大学)と共同研究する．
(3)については，固有値問題に関する過去の数学的研究を参考にして進める．

４．研究成果

(1) 偏微分方程式境界値問題の特異点集合形状最適化問題に関する諸結果を「境界値問題での特異点集合の形状最適化の有限要素解析」(岩波「数学」70 巻)にまとめた．
(2) Stokes 問題については，ラグランジュ乗数法を用いることでエネルギーの形状感度を導くことができた．Stokes 問題は，ラグランジュアンＬ(v,λ)の鞍点(u,p)として求められる．ここで v はベクトル値ポアソン方程式の許容関数集合なので Mapping Technique が使える．もし，λの属する関数空間の双対空間に対して Mapping Technique が使えるならラグランジュアンの形状感度は，物質微分を含む項が消えて(u(Ω),p(Ω))に対する感度だけになることが証明できた．なお，物質微分とは写像φ：Ω→Ω＋δΩによるΩ＋δΩで定義された解 u(Ω＋δΩ,y)の引き戻しに対する形状感度 u(Ω＋δΩ,φ(x))の形状感度である．なお，x はΩ上の点で，y はΩ＋δΩの点である．ただし，流速が全境界でゼロとなる空間に対する双対空間では Mapping Technique は使えない．流速の境界への応力がゼロとなる部分が少しでも有れば，Mapping Technique が使えるのでエネルギーの形状感度がラグランジュアンＬ(v,λ)の鞍点(u,p)での形状感度から導くことができた．結果は，Shape

differentiability of Lagrangians and application to Stokes problem (SIAM J. Control Optim. 56 (2018), 3, 3668-3684)にまとめた．また Stokes 問題での一般 J 積分を導き，関係式☆を示すことが出来た(学会発表のみ)．

(3) 固有値問題については，E.Haug, K. Choi & V. Komkov による本 Design Sensitivity Analysis of Structural Systems にある証明が数学的に正しいことを確認し，固有値問題における一般 J 積分 $JE\omega(u,\mu)= P\omega(u,\mu)+ RE\omega(u,\mu)$を作り，関係式「固有値の形状感度　$-2RE\omega(u,\mu)$」を導けた(学会発表のみ)．なお，固有値での一般 J 積分での第 1 項は研究の背景で述べた $P\omega(u,\mu)$と同じものである．



上図のように，Mapping Technique が使える問題については，破壊問題・境界形状最適化・界面形状最適化などを含む偏微分方程式境界値問題の特異点集合形状最適化問題について，エネルギー，最小２乗平均誤差，固有値などを評価関数とすることができた．また，Stokes 問題のように Mapping Technique が使えない問題についても，使える関数空間での拘束条件としてラグランジュ乗数法を使うことで同様な結果を導出できる可能性を得た．

工学において，破壊力学，形状最適化，界面形状最適化は重要な問題であり，独立して研究されてきた. 本研究によりこれらの分野を統合する理論が一般 J 積分と H1 勾配法を用いて構成でき, FreeFem++を使って有限要素法を使った数値計算が容易であることが示せた．一般 J 積分は筆者が考案したものであり，関係式☆と性質☆を維持するように理論の拡張を行ってきた．分担者の協力を得ながら本研究を筆者が行ってきたことから国内外において同様な研究はない.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計４件）

① K.Ohtsuka, Shape Optimization by GJ-Integral: Localization Method for Composite Material, Mathematical Analysis of Continuum Mechanics and Industrial Applications, 査読有, Springer, 2017, 99-109.

② K.Ohtsuka, Shape Optimization by Generalized J-Integral in Poisson’s Equation with a Mixed Boundary Condition, Mathematical Analysis of Continuum Mechanics and Industrial Applications II, 査読有, Springer, 2018, 73-83.

③ 大塚厚二，境界値問題での特異点集合の形状最適化の有限要素解析，日本数学会『数学』，査読有，岩波，2018，255-274.

④ V.A. Kovtunenko & K. Ohtsuka, Shape differentiability of Lagrangians and application to Stokes problem, SIAM J. Control Optim. 56 (2018), 査読有, 3668-3684.

〔学会発表〕（計７件）

① H. Azegami, Second derivative of cost function and H1 Newton method in shape optimization problem, 国際会議 CoMFoS16, 2016 年.

② K. Ohtsuka, Shape optimization of set of singular points in boundary value problems, 国際会議 CoMFoS16, 2016 年.

③ K. Ohtsuka, Shape optimization of singular points in boundary value problems, 国際会議 CoMFoS17, 2017 年.

④ T. Takaishi, To extend the phase field model to non-brittle crack growth, 国際会議 CoMFoS17, 2017 年.

⑤ M. Kimura & A. Suzuki, Deformation problem for glued elastic bodies and an alternative iteration method, 国際会議 CoMFoS18, 2018.

⑥ 大塚厚二，一般 J 積分による固有値の形状感度解析，日本数学会，2018.

⑦ 大塚厚二，鞍点型変分問題での形状感度解析と一般 J 積分，日本数学会，2018.

〔図書〕（計１件）
畔上 秀幸，森北出版，形状最適化問題，2016，605.

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）
○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等
http://comfos.org

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：畔上　秀幸
ローマ字氏名：(AZEGAMI, Hideyuki)
所属研究機関名：名古屋大学
部局名：大学院情報科学研究科
職名：教授
研究者番号（8 桁）：70175876

(2)研究分担者
研究分担者氏名：木村　正人
ローマ字氏名：(KIMURA, Masato)
所属研究機関名：金沢大学
部局名：数物科学類
職名：教授
研究者番号（8 桁）：70263358

(3)研究分担者
研究分担者氏名：高石　武史
ローマ字氏名：(TAKAISHI, Takeshi)
所属研究機関名：広島国際学院大学
部局名：工学部
職名：教授
研究者番号（8 桁）：00268666