

令和 2 年 6 月 5 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05313

研究課題名（和文）Lefschetz thimbleによる経路積分と複素作用系のシミュレーション法

研究課題名（英文）Path-integral on Lefschetz thimbles and simulation methods

研究代表者

菊川 芳夫（Kikukawa, Yoshio）

東京大学・大学院総合文化研究科・教授

研究者番号：20252421

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：格子ゲージ理論の枠組みで構成されたGlashow-Weinberg-Salam模型では、カイラルなゲージ結合の性質のため、作用が複素数部分を持ち、いわゆる符号問題のために通常の高ブリッド・モンテカルロ法等はそのままでは適用できない。本研究では、この問題の克服を目指して、Lefschetz thimble上のハイブリッド・モンテカルロ法の定式化と改良を行った。また、格子ゲージ理論のSchwinger-Keldysh形式を定式化し、Lefschetz thimble法を適用するために、Lefschetz thimble structureの解析を進めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

素粒子標準模型は、自然界に存在する素粒子の基本相互作用を記述し、高エネルギー素粒子実験によって精密に検証されてきた。この標準模型の量子ダイナミクスを詳細に解析し、その性質を精密に予言することは素粒子理論研究の大きな課題である。素粒子標準模型の格子ゲージ理論の定式化とそのシミュレーション法の開発は、この目的を遂行するための強力な手法を与えることになる。

研究成果の概要（英文）：The lattice gauge theory of Glashow-Weinberg-Salam model has a complex action because the electroweak interaction is chiral. It suffers from the so-called sign-problem, and the state-of-art Monte Carlo simulation method does not apply to it. We formulated and developed a Hybrid Monte Carlo method on Lefschetz thimbles to overcome this difficulty. We also developed the Schwinger-Keldysh formalism of lattice gauge theory and studied its Lefschetz-thimble-structure.

研究分野：素粒子理論，場の量子論

キーワード：格子ゲージ理論 符号問題 経路積分 Lefschetz thimble GWS模型 Schwinger-Keldysh 形式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

## 1. 研究開始当初の背景

標準模型は、ゲージ群  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  に基づくカイラルゲージ理論であり、その  $SU(2) \times U(1)$  部分群に対応するゲージ対称性はヒッグス機構によって自発的に破れていると考えられている。この機構を担うヒッグス場の励起状態、すなわちヒッグス粒子はついに発見されたが、ヒッグス機構の背後にあるダイナミクスや対称性の解明は未だなされていない。今年度再開された LHC 実験の結果に期待がかかっている。

このような標準模型 (あるいは、それを越える模型) の力学的な性質を調べるためには、カイラルゲージ対称性を明白に保つような、場の量子論の非摂動的な枠組みが必要になる。格子ゲージ理論は量子色力学を記述する非可換ゲージ理論 (QCD) の構成的な定義を与え、quark の閉じ込めの一つの理論的理解を与えることができる。さらに、ハドロンの質量や電弱相互作用の理論的計算を数値的に実行するための非摂動的な枠組みを提供する。QCD の低エネルギー物理を理解する上で重要なカイラル対称性についても、理論的困難のあることが知られていた (Nielsen-Ninomiya 1981 [1, 2]) が、近年、Ginsparg-Wilson 関係式 (Ginsparg-Wilson 1982 [3]) を満足するゲージ共変で局所的な格子 Dirac 演算子が構成され (Neuberger 1998; Neuberger-Kikukawa 1998 [4, 5])、これによって、格子ゲージ理論の枠組でもカイラル対称性をもつフェルミオンの摂動的及び非摂動的な性質を記述することが可能になった (Luscher 1999 [6])。申請者は、近年、このカイラル対称性を厳密に保つ格子ゲージ理論の枠組みを用いて、Glashow-Weinberg-Salam 模型 (ゲージ群  $SU(2) \times U(1)$  に基づく電弱統一理論) の構成的な定式化を与えた [7]。この定式化は、 $SU(2)$  ゲージ場の非自明なトポロジカルセクターを全てカバーし、カイラルアノマリーによるバリオン数非保存過程の記述が可能になった定式化になっている。しかし、格子 Glashow-Weinberg-Salam 模型では、そのカイラルなゲージ結合の性質のため、作用が複素数部分をもつ。このため、いわゆる符号問題のために、通常のハイブリッド・モンテカルロ法等はそのままでは適用できない。格子 QCD においても有限密度下で同様の問題が生じるため、符号問題の克服は、低温・高密度状態のハドロンの核物質の性質の解明に向けての、大きな課題となっている。

## 参考文献

- [1] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B 185, 20 (1981) [Erratum-ibid. B 195, 541 (1982)]
- [2] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B 193, 173 (1981)
- [3] P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, Phys. Rev. D 25, 2649 (1982)
- [4] H. Neuberger, Phys. Lett. B 417, 141 (1998); B 427, 353 (1998)
- [5] Y. Kikukawa and H. Neuberger, Nucl. Phys. B 513, 735 (1998)
- [6] M. Luscher, Phys. Lett. B 428, 342 (1998) [arXiv:hep-lat/9802011]
- [7] D. Kadoh and Y. Kikukawa, JHEP 0805:095 (2008) [arXiv:0709.3658 [hep-lat]]

## 2. 研究の目的

符号問題への一つの可能なアプローチとして、経路積分を複素数領域に拡張し、収束性のよい積分領域を採用する方法が考えられる。特に、Morse 理論 (Picard-Lefschetz 理論) から従う Lefschetz thimble を用いた積分領域では、複素作用の虚数部分は定数となるため、モンテカルロ法が適用できる可能性がある [8, 9, 10]。申請者は、最近、Lefschetz thimble 上でのハイブリッド・モンテカルロ法を定式化し、有限密度下の  $\lambda\phi^4$  模型に適用して、その有効性を検証した [10]。さらに 1 次元 Thirring 模型における経路積分の Lefschetz thimble structure を詳しく解析し、有限密度下の 1 次相転移が複数の thimble の寄与によって得られる事を明らかにした [11, 12]。

本研究では、特に格子ゲージ理論の場合に、経路積分を複素領域に拡張する上記のアプローチの検証と、複素作用系 (有限密度下の QCD, GWS 模型など) の数値シミュレーション法の開発を進める計画である。

## 参考文献

- [8] E. Witten, "Analytic Continuation Of Chern-Simons Theory," arXiv:1001.2933 [hep-th].
- [9] M. Cristoforetti et al. [AuroraScience Collaboration], Phys. Rev. D 86, 074506 (2012) [arXiv:1205.3996 [hep-lat]].
- [10] H. Fujii, D. Honda, M. Kato, Y. Kikukawa, S. Komatsu and T. Sano, JHEP 1310, 147 (2013) [arXiv:1309.4371 [hep-lat]].
- [11] H. Fujii, S. Kamata and Y. Kikukawa, JHEP 1511, 078 (2015), Erratum: JHEP 1602, 036 (2016), arXiv:1509.08176 [hep-lat].
- [12] H. Fujii, S. Kamata and Y. Kikukawa, JHEP 1512, 125 (2015), Erratum: JHEP 1609, 172 (2016), arXiv:1509.08176 [hep-lat].

### 3. 研究の方法

[2] 本研究提案の期間 (3 年) における具体的な研究課題は以下の通りである .

- (1) 格子ゲージ理論の経路積分の複素数拡張と Lefschetz thimble structure の解析
  - ・ 2 次元格子ゲージ模型 (QED2 (U(1)), QCD2 (SU(3)), CP(N-1) (超対称) 模型)
  - ・ 4 次元格子 QCD の高密度模型(いわゆる Heavy-Dense-QCD(HDQCD)模型)
  - ・ 4 次元格子 QCD
- (2) Lefschetz thimble 上のハイブリッド・モンテカルロ法の改良-フェルミオン行列式を含む場合
- (3) 有限密度-QCD (HDQCD) への適用
- (4) 2 次元 SU(N) 格子カイラルゲージ理論への適用

(研究計画, 準備状況)

- (1) 格子ゲージ理論の経路積分の複素数拡張と Lefschetz thimble structure の解析  
複素数拡張された格子ゲージ理論の経路積分における Lefschetz thimble 構造を解析するために, 以下のゲージ模型を取り上げて, 複素数古典解 (critical point) の分類, thimble-構造 (gradient flow, intersection number, Stokes phenomena) の解析を進める. 特に, 連続理論で知られている実-, 複素-古典解 (Instanton, Bion など) の格子ゲージ理論における対応物を探し, それを手がかりにすることで, 格子ゲージ理論における複素数古典解 (critical point) の分類を試みる. さらに, それらの実-, 複素-古典解 (critical point) に伴う Lefschetz thimble の解析を行う. この解析は低次元模型から段階的に行う計画である. 4 次元格子 QCD については, まず, その高密度模型(いわゆる Heavy-Dense-QCD(HDQCD) 模型)を解析する. これによって, 先行している複素 Langevin 法による結果の検証が可能になると想定している.
  - ・ 2 次元格子ゲージ模型 (QED2 (U(1)), QCD2 (SU(3)), CP(N-1) (超対称) 模型)
  - ・ 4 次元格子 QCD の高密度模型(いわゆる Heavy-Dense-QCD(HDQCD)模型)
  - ・ 4 次元格子 QCD
- (2) Lefschetz thimble 上のハイブリッド・モンテカルロ法の改良  
申請者は, 最近, Lefschetz thimble 上でのハイブリッド・モンテカルロ法を定式化し, 有限密度下の 4 模型に適用して, その有効性を検証した. この先行研究において開発した, Lefschetz thimble 上のハイブリッド・モンテカルロ法に, フェルミオンの寄与を導入するための拡張を施す. 特に, フェルミオン行列式のゼロ点を境界にもつ Lefschetz thimble 上では, Gradient flow equation における force 項に特異性が現れるため, 積分法 (4 次 Runge-Kutta 法) に adaptive stepping の手法を取り入れることによって, 解の精度を高める. また, Molecular dynamics においては pseudo フェルミオンの手法を導入する. これらの拡張の上で, 有限密度下の格子 QCD や SU(2)カイラル湯川模型用のコードを作成する.
- (3) 有限密度-QCD (HDQCD) への適用  
格子 QCD の高密度領域の模型である HDQCD に Lefschetz thimble の方法を適用する. 特に, 比較的簡単に得られる, 特徴的な critical point の寄与が, 模型の QCD 的な相構造をどのように・どの程度まで再現できるのかを検証する. 複素 saddle point 近似による解析的計算とハイブリッド・モンテカルロ法シミュレーションを適用して調べる. これらの結果は, 複素 Langevin 法による結果と詳細な比較・検証を行う.

### 4. 研究成果

平成 28-30 年度の研究計画のうち,

- (1) 格子ゲージ理論の経路積分の複素数拡張と Lefschetz thimble structure の解析
- (2) Lefschetz thimble 上のハイブリッド・モンテカルロ法の改良
- (3) 有限密度-QCD (HDQCD) への適用

に関連する課題に取り組んだ. 特に, 複素数拡張された格子ゲージ理論の経路積分における Lefschetz thimble 構造を解析するために, 複素数古典解 (critical point) の分類, thimble-構造 (gradient flow, intersection number, Stokes phenomena) の解析を進めることが課題である. 平成 25 年--27 年度に行った, 1 次元 Thirring 模型における Lefschetz thimble 構造の解析からは, 有限密度下の 1 次相転移が複数の thimble の寄与によって得られる事が明らかになった[1,2]. このような複数の thimble の寄与を, 一つの thimble の寄与として与えることができるような, 複素数拡張における reweight 法や Lefschetz thimble 構造の変形の可能性を詳細に検討した[3]. 後者の thimble 構造の変形の方法[4]は, 本質的には, 複素数拡張における reweight 法の一つとみなすことが可能であり, いずれの方法でも, overlap 問題による限界があり得る. 統計によってどこまで overlap 問題を回避できるのか, 1 次元 Thirring 模型において検証した.

[1] H.Fujii, S.Kamata and Y.Kikukawa, JHEP11(2015)078, arXiv:1509.08176 [hep-lat].

[2] H.Fujii, S.Kamata and Y.Kikukawa, JHEP12(2015)125, arXiv:1509.09141 [hep-lat].

- [3] H.Fujii, S.Kamata and Y.Kikukawa, arXiv:1710.08524 [hep-lat].  
[4] S.Tsutsui and T.M.Do, Phys.Rev.D94 (2016) no. 7, 074009, arXiv:1508.04231.

これと並行して進めていた,カイラルゲージ理論(標準模型、 $SO(10)$ 理論)の格子定式化に関する研究に進展があった [5][6]. また, フェルミオン数生成の非平衡過程の記述に必要な実時間相関関数を与える Schwinger-Keldysh 形式を, 格子ゲージ理論に拡張する研究に進展があった [7]. この格子 Schwinger-Keldysh 形式に Lefschetz thimble 法を適用するために, Lefschetz thimble structure の解析を進めた.

これらの進展によって, 2次元  $U(1)$  および 4次元  $SO(10)$  格子カイラルゲージ理論に Lefschetz thimble 法を適用する目処がたち, 研究計画のうち,

(4) 2次元  $SU(N)$  格子カイラルゲージ理論への適用  
と高次元模型への展開の準備が整った段階である.

- [5] Y. Kikukawa, PTEP (2019) no. 11, 113B03; arXiv:1710.11618.  
[6] Y. Kikukawa, PTEP (2019) no. 7, 073B02; arXiv:1710.11101.  
[7] H. Fujii, H. Hoshina, Y. Kikukawa, "Schwinger-Keldysh formalism for Lattice Gauge Theories", in preparation.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Yoshio Kikukawa	4. 巻 no. 7
2. 論文標題 Why is the mission impossible? Decoupling the mirror Ginsparg-Wilson fermions in the lattice models for two-dimensional Abelian chiral gauge theories	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Progress of Theoretical and Experimental Physics	6. 最初と最後の頁 073B02
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） <a href="https://doi.org/10.1093/ptep/ptz055">https://doi.org/10.1093/ptep/ptz055</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yoshio Kikukawa	4. 巻 no. 11
2. 論文標題 On the gauge invariant path-integral measure for the overlap Weyl fermions in 16 of $S0(10)$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Progress of Theoretical and Experimental Physics	6. 最初と最後の頁 113B03
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） <a href="https://doi.org/10.1093/ptep/ptz115">https://doi.org/10.1093/ptep/ptz115</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 1件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 菊川芳夫
2. 発表標題 格子ゲージ理論における符号問題とLefschetz Thimble 法の一般化
3. 学会等名 日本物理学会第74回年次大会（九州大学 伊都キャンパス 2019.3.14~17）（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 保科宏樹, 藤井宏次, 菊川芳夫
2. 発表標題 格子ゲージ理論におけるSchwinger-Keldysh形式の定式化
3. 学会等名 日本物理学会第74回年次大会（九州大学 伊都キャンパス 2019.3.14~17）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshio Kikukawa
2. 発表標題 Gauge-invariant path-integral measure for the Overlap Weyl fermions in 16 of $SO(10)$ and the Standard Model
3. 学会等名 The 37th annual International symposium on lattice field theory (Wuhan, China, June 16-22, 2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----