様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年 　 ６ 月 ２４ 日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５３２６

研究課題名（和文）メビウスドメインウォールフェルミオンに対するシュレーディンガー汎関数法の研究

研究課題名（英文）Sutudy on Schroedinger Functional method for Moebius domain wall fermion

研究代表者
石川　健一（Ishikawa, Kenichi）

広島大学・理学研究科・准教授

研究者番号：６０３３４０４１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：シュレディンガー汎関数法(SF法)は格子場理論での非摂動的なくりこみを定式化する方法であり、特に格子QCDに対して適用され成果を上げてきた。
近年、格子カイラル対称性をもつフェルミオンであるドメインウォールフェルミオン(DWF)を用いた格子QCD計算が行われるようになり、非摂動的くりこみ係数の計算が必要となっている。本研究ではメビウスDWFに対するSF法の定式化とくりこみ係数の計算を目的とした。研究期間内においてメビウスDWFに対するSF法に必要な時間境界条件の設定方法を確立した。これは摂動の１ループでSF法のくりこまれた結合定数が既知値と一致していることを確認することで行われた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
格子QCD計算を用いて陽子・中性子・原子核の性質をクォーク・グルーオンという素粒子で記述できる。近年、世界的に格子QCDを用いて原子核の性質を理解しようとしている。メビウスドメインウォールフェルミオン（メビウスDWF）は格子カイラル対称性を持つため、陽子・中性子・原子核をより良く理解できると考えられる。格子QCD計算ではくりこみを行う必要があるが非摂動計算のためのくりこみが必要である。シュレディンガー汎関数(SF)法は非摂動くりこみできるがメビウスDWFへの(SF)法の適用法がまだなかった。本研究成果によりSF法の適用方法が解明したので格子QCD計算で良い精度での計算ができるようになった。

研究成果の概要（英文）：Schroedinger functional (SF) method is one of non-perturbative scheme for lattice quantum field theories, and has been successfully applied to lattice QCD. Recently the domain wall fermion (DWF) having lattice chiral symmetry has became widely used in lattice QCD simulations, and the non-perturbative renormalization for DWF is required. In this study project, we aimed to construct the SF method for the Moebius DWF, which has a better lattice chiral symmetry. We have successfully constructed the valid temporal boundary condition required for the SF method with the Moebius DWF. With this boundary condition, we have computed the one-loop beta function (renormalized coupling) with the Moebius DWF, and observed the consistency to the known one-loop beta function (renormalized coupling).

研究分野：素粒子論

キーワード：格子場の量子論　摂動計算

１．研究開始当初の背景

現在の素粒子標準模型にはこの理論だけでは決まらない多くのパラメータがありこれらは実験で決めなければならない。これらのパラメータが様々な実験結果と矛盾なく決まる場合は素粒子標準模型の妥当性が言えるが、もし矛盾が生じるようであれば素粒子標準模型の欠陥を示唆し、新しい物理模型を考える必要が出てくる。このような理論探求のプロセスにおいて重要なことは、理論の計算精度と実験の精度を正しく評価しながら矛盾の有無を追求することである。

素粒子標準模型の理論計算で最も不定性が大きい部分はクォークセクターと呼ばれる強い力の力学を含むところである。クォークは陽子や中性子の構成要素である素粒子で強い力の源となる色電荷をもつ。色電荷はグルーオンにより媒介される。そのクォークとグルーオンの相対論的量子場の理論に基づく力学は量子色力学（QCD）とよばれ、素粒子標準模型の一部をなしている。量子色力学による解析ではクォーク間の力が高エネルギーに行くほど弱くなっていく漸近自由性という性質があり、この性質により力の強さを表す結合定数に関する摂動展開による近似計算の妥当性が高エネルギー領域で確保されている。一方エネルギーが低い領域では結合定数が大きくなり摂動計算は破綻する。この結合定数が長距離（低エネルギー）領域で大きくなるという性質は、現実世界においてクォークは陽子や中性子の中に閉じ込められて単体のクォークとして実験的に取り出すことができていないという事実に対応していると考えられている。このため、QCD を用いてクォークとグルーオンの多体系としての陽子や中性子の性質を摂動論により近似的に求めることは不可能となっている。このため、素粒子標準模型のクォークセクターに含まれるパラメータ（クォークの質量や小林・益川行列要素）を含む理論式に対応する実験からこれらのパラメータを精度良く求めることができない。素粒子標準模型のクォークセクターには理論的不定性が大きく残っている。

QCD を摂動による近似ではなく直接計算することのできる手法として、格子量子色力学（格子QCD）という手法がある。これにはスーパーコンピューターを用いた数値計算が必要であるが結合定数による展開は必要ではない。しかしながら、格子 QCD では時空を格子状に離散化し時空の大きさを有限の体積に正則化し場の理論の非加算無限多自由度系を有限加算多自由度系に射影しているため、有限格子間隔や有限体積からくる系統誤差を含む。格子間隔をゼロに持っていく極限を取る際に場の理論に特有のくりこみという操作も必要となる。格子 QCD ではこれらの系統誤差をうまく制御しながら精度の良い計算をする必要がある。近年のスーパーコンピューターの発展により有限格子間隔や有限体積による系統誤差の制御はうまく働いている。格子 QCD は素粒子標準模型のクォークセクターの解析に必要不可欠なツールとなっている。

一方、近年まで取り除くのが困難であった系統誤差としてゼロ質量クォークの持つ対称性であるカイラル対称性に基づく計算がある。現実世界ではゼロ質量のクォークが QCD の力学的効果により有限の質量を獲得したために、陽子や中性子はゼロ質量クォークの束縛状態であるにもかかわらず１GeV 程度の質量を持つ。これは南部によりカイラル対称性の自発的破れという現象で説明されている。さらには、対称性の破れに伴いゼロ質量のパイ中間子の存在が予言され、パイ中間子が核力の担い手となることも理論的に説明されている。格子 QCD でのカイラル対称性の実現は近年、ドメインウォールフェルミオンやオーバーラップフェルミオンという格子カイラル対称性を持つフェルミオン作用の導入により解決しつつある。実際には、これまで用いられてきたウィルソン型フェルミオン作用と比べてドメインウォールフェルミオンやオーバーラップフェルミオンを用いた計算は、計算コストが１０倍以上大きくなるため困難であった。近年のスーパーコンピューターの発展によりようやく始まったところである。

量子場の理論に特有のくりこみという操作は格子 QCD でも必要である。通常の摂動的量子場の理論計算ではくりこみも摂動の次数ごとに行い紫外発散を有限の観測量に吸収していく。格子 QCD では非摂動計算を行うためくりこみも非摂動的に行う必要がある。研究の背景でも述べたように格子カイラル対称性を持つフェルミオン作用に対する非摂動的なくりこみが必要となる。格子カイラル対称性を持つフェルミオン作用を用いた格子 QCD 計算は近年ようやく本格的になったところでありまだ、非摂動的くりこみの整備が追いついていない状況であった。

格子 QCD では、長年これまで用いられてきたウィルソン型フェルミオン作用で大きな成功を収めてきたシュレディンガー汎関数(SF)法というくりこみ処方がある。この SF 法くりこみ処方をドメインウォールフェルミオンに適用する研究が２０１０年頃に武田により行われた。一方、ドメインウォールフェルミオンよりもより少ない計算コストで格子カイラル対称性を保持できるメビウスドメインウォールフェルミオンが２０１２年頃に Brower らにより定式化された。ドメインウォールフェルミオンへの SF 法の適用は２０１４年から石川・村上により始められている。

２．研究の目的

本研究では長年これまで用いられてきたウィルソン型フェルミオン作用で大きな成功を収めてきた SF 法をメビウスドメインウォールフェルミオンに適用し非摂動的くりこみで走る結合定数を計算することを目的とした。

３．研究の方法

メビウスドメインウォールフェルミオンに対する SF 法を定式化するために、走る結合定数に関するベータ関数を摂動の１ループで計算し、既知のフェルミオンの寄与を再現することを目標とした。

武田のドメインゥールフェルミオンへの SF 法の定式化に基づき、SF 法の時間境界で格子カイラル対称性を顕に破る手法をメビウスドメインウォールフェルミオンに拡張した。

有効作用を１ループで計算し SF 処方の走る結合定数を計算した。格子間隔がゼロとなる極限を取り、走る結合定数に現れるベータ関数の１ループ寄与部分を引き出し、これが既知のものと一致することを確認する。

４．研究成果

SF 法に必要なメビウスドメインウォールへの時間境界項の与え方は以下の通りである。次のD_{MDWF}^{SF}が、SF 法でのメビウスドメインウォール演算子である。

$$D_{MDWF}^{\mathrm{SF}} = D_{MDWF} + B_{SF}$$

$$D_{MDWF} = \begin{pmatrix} D_1^{(+)} & D_1^{(-)}P_L & & & & -m_f D_1^{(-)}P_R \\ D_2^{(-)}P_R & D_2^{(+)} & D_3^{(-)}P_L & & & \\ & D_3^{(-)}P_R & D_3^{(+)} & D_3^{(-)}P_L & & \\ & & D_3^{(-)}P_R & D_3^{(+)} & D_3^{(-)}P_L & \\ & & & D_2^{(-)}P_R & D_2^{(+)} & D_2^{(-)}P_L \\ -m_f D_1^{(-)}P_L & & & & D_1^{(-)}P_R & D_1^{(+)} \end{pmatrix}$$

$$B_{SF} = \begin{pmatrix} & & & & & -D_1^{(-)}B \\ & & & & -D_1^{(-)}B & \\ & & & -D_1^{(-)}B & & \\ & & D_1^{(-)}B & & & \\ & D_1^{(-)}B & & & & \\ D_1^{(-)}B & & & & & \end{pmatrix}$$

$$D_j^{(+)} \equiv D_W b_j + 1, D_j^{(-)} \equiv D_W c_j - 1$$

$$B(n,m) \equiv \delta_{n,m}\gamma_5\left(\delta_{n_4,1}P_- + \delta_{n_4,N_T-1}P_+\right)$$

$$P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}, P_R = \frac{1+\gamma_5}{2}, P_+ = \frac{1+\gamma_4}{2}, P_- = \frac{1-\gamma_4}{2}$$

ここで、例としてドメインウォール方向の５次元方向の格子点数を６とした。m_fはフェルミオン質量である。パラメータ$\left(b_j, c_j\right)$はメビウスドメインウォールフェルミオンのパラメータで最適化により通常のドメインウォールフェルミオンより良い格子カイラル対称性を実現できる。D_Wは負質量のウィルソンフェルミオン演算子である。第１項D_{MDWF}は通常のメビウスドメインウォールフェルミオン演算子であるが、パラメータ$\left(b_j, c_j\right)$の並びが(1, 2, 3, 3, 2, 1) とう対称に並ぶ必要が SF 法の時空対称性から要求される。さらに付加項B_{SF}が必要となる。B_{SF}に含まれる演算子Bは時間方向の格子座標n_4が1と$N_T - 1$ の時間境界のみでゼロでない（N_Tは時間方向の格子点数）。B_{SF}の５次元方向依存性が反対角的に並ぶことから時間境界上で格子カイラル対称性をあらわに破る項である。

この演算子に基づいて SF 法の結合定数$g_{SF}(L)$を以下の式で計算することができる。

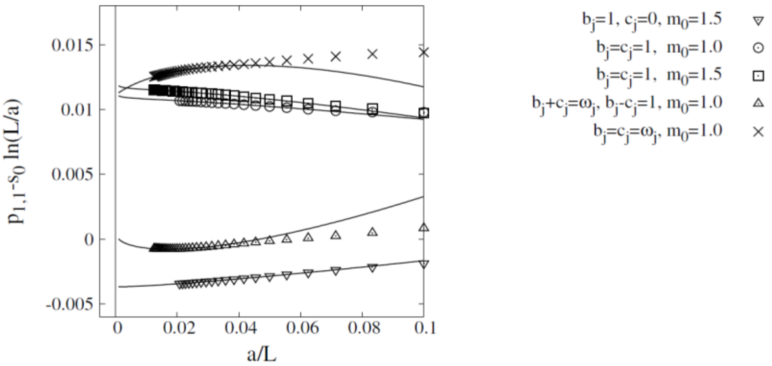
$$g_{SF}^2 = g_0^2 + p_1 g_0^4 + O(g_0^6), p_1 = p_{1,0} + N_f p_{1,1}$$

$$p_{1,1} = \frac{1}{k}\sum_{\vec{p}} Tr\left[\frac{\partial \widetilde{D}_{MDWF}^{SF}}{\partial\eta}\left(\widetilde{D}_{MDWF}^{SF}\right)^{-1} - \frac{\partial \widetilde{D}_{PV}^{SF}}{\partial\eta}\left(\widetilde{D}_{PV}^{SF}\right)^{-1}\right]$$

ここで、$\widetilde{D}_{MDWF}^{SF}$は$D_{MDWF}^{\mathrm{SF}}$の空間格子座標に関してフーリエ変換した運動量表示のメビウス DWF 演算子、$\widetilde{D}_{PV}^{SF}$は$\widetilde{D}_{MDWF}^{SF}$において$m_f = 1$とおいた Pauli-Villars 正則子である。ηは SF 法の境界条件からくるゲージ場のパラメータである。$\sum_{\vec{p}}$ は空間運動量に関する和であり、有限体積$N_S a = L$で量子化されている（$\vec{p} = (2\pi\vec{n} + \theta)/N_S$、$\vec{n}$は整数ベクトル $n_j = 0,..,N_S - 1$）。$p_{1,1}$はN_Sの関数であるが、$N_S = L/a$なので物理長さLを固定して格子間隔aをゼロに持っていくことは$N_S \to \infty$の極限を取ることに対応する。$p_{1,1}$のL/a依存性から１ループベータ関数が読み取れる。

$$p_{1,1} \sim r_0 + s_0 \log\left(\frac{L}{a}\right) + \left(\frac{a}{L}\right)\left(r_1 + s_1 \log\left(\frac{L}{a}\right)\right) + O(a^2),\ \text{for}\ \ a \to 0$$

s_0が１ループベータ関数$b_{0,1}$を用いると$s_0 = 2b_{0,1} = -1/(12\pi^2)$となっていなければならない。



１ループベータ関数を計算し連続極限をとり既知のベータ関数を再現することを確認するための図が右の図である（雑誌論文[1]図 11 より引用）。データ点は５次元方向の格子点数が 8 の場合の $p_{1,1} - s_0 \log\left(\frac{L}{a}\right), s_0 = -1/(12\pi^2)$を示している。いろいろなパラメータ$(b_j, c_j)$と負質量のとり方に対して、$s_0 = -1/(12\pi^2)$を仮定してフィットしたものが実線である。実線は$a \to 0$付近でよくデータを再現していることから１ループベータ関数を再現できていることが分かる。より定量的に$p_{1,1}$の振る舞いを調べた結果、及び$\overline{\mathrm{MS}}$くりこみ処方から読み取られる r_0 の結果と $p_{1,1}$の解析から得られる r_0 の値にも矛盾がないことが示された。これらの結果につながる成果は学会発表[2,3]にて発表され最終結果は雑誌論文[1]にまとめている。

以上でメビウス DWF の SF 法の定式化ができたので、次に非摂動的な走る結合定数の計算を SF 方で計算する予定であったが、上記理論の定式化に時間がかかり、残念ながら格子 QCD シミュレーションプログラムを本研究期間内で完成させることができなかった。

本研究で確保した計算時間を有効に使うため、近年提案された非摂動くりこみ処方であるグラディエントフロー法を用いて高精度に QCD ラムダパラメータΛ_{QCD}の計算を行った。具体的にはツイストされた境界条件でのクォークのいない純 SU(3)ヤン・ミルズ理論の走る結合定数を非摂動的に計算し、ここから$\overline{\mathrm{MS}}$処方の Λ_{QCD}と弦張力$\sqrt{\sigma}$やポテンシャルパラメータr_0との比を高精度に求めた。

$$\frac{\Lambda_{\overline{MS}}}{\sqrt{\sigma}} = 0.517(10)(^{+8}_{-7}) \quad \text{and} \quad r_0\Lambda_{\overline{MS}} = 0.593(12)(^{+12}_{-9})$$

これらの結果につながる成果は学会発表[4] 雑誌論文[3]にて発表され、最終結果については雑誌論文[2] にまとめている。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計３件）

[1] Yuko Murakami, Ken-Ichi Ishikawa, “Construction of lattice Möbius domain wall fermions in the Schrödinger functional scheme”, International Journal of Modern Physics A, Vol. 33, No. 1 (2018) 1850012, DOI: 10.1142/S0217751X18500124, 査読有

[2] Ken-Ichi Ishikawa, Issaku Kanamori, Yuko Murakami, Ayaka Nakamura, Masanori Okawa, Ryoichiro Ueno, “Non-perturbative determination of the Λ-parameter in the pure SU(3) gauge theory from the twisted gradient flow coupling”, J. High Energ. Phys. (2017) 2017: 67. DOI: 10.1007/JHEP12(2017)067, 査読有

[3] Ken-Ichi Ishikawa, Issaku Kanamori, Yuko Murakami, Ayaka Nakamura, Masanori Okawa, Ryoichiro Ueno, “Numerical determination of the Λ-parameter in SU(3) gauge theory from the twisted gradient flow coupling”, PoS LATTICE2016 (2016) 185, DOI: 10.22323/1.256.0185, 査読有

〔学会発表〕（計４件）

[1] Antonio Gonzalez-Arroyo, 石川健一（発表者）, 上野崚一郎, 大川正典, 金森逸作, 宮鼻叶太, 「数値確率摂動展開理論を用いたツイスト境界条件ラージ N 行列模型の解析」日本物理学会第 74 回年次大会（2019 年）

[2] Yuko Murakami （発表者）and Ken-Ichi Ishikawa, “THE SIMPLIFIED CONSTRUCTION OF THESCHRÖDINGER FUNCTIONAL SCHEME WITH THE MÖBIUS DOMAIN WALL FERMIONS”, International Conference, Modern Trends in Physics, 20-22 April 2017, Baku State University (2017)

[3] 石川健一（発表者）, 村上祐子, 「格子 QCD におけるメビウスドメインウォールを用いた QCD ラムダパラメータの計算」日本物理学会第 72 回年次大会（2017 年）

[4] Ken-Ichi Ishikawa, Issaku Kanamori, Yuko Murakami, Ayaka Nakamura, Masanori Okawa, Ryoichiro Ueno（発表者）,"Numerical determination of the Λ-parameter in SU(3) gauge theory from the twisted gradient flow coupling", the 34th International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice 2016), 24 - 30 July 2016, University of Southampton, UK (2016)

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：村上 祐子
ローマ字氏名：Yuko Murakami

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。