

令和 2 年 6 月 25 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05468

研究課題名(和文) ランダムフラクタルと可積分確率過程の研究

研究課題名(英文) Studies on random fractals and integrable stochastic processes

研究代表者

堺 和光 (Sakai, Kazumitsu)

東京理科大学・理学部第二部物理学科・准教授

研究者番号：10397028

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：2次元臨界現象に現れる幾何学的性質を分類する発展方程式としてSchramm-Loewner発展(SLE)がある。我々は、SLEと(1+1)次元量子可積分系の対応の研究を行った。特に、SLEにスピン自由度を付随させた場合、そのSLEはスピンCalogero-Sutherland模型に対応することを見た。また、4状態Potts模型の臨界点におけるランダムフラクタルに関して研究を行い、その交叉確率に特有のログ補正が現れることを見出した。

また、量子逆散乱法を用いて、B型およびC型のアイス模型の分配関数を研究し、その波動関数がある種の対称多項式で記述できることを見出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

2次元臨界現象にはフラクタルと呼ばれる特有の幾何構造が現れることが知られている。Schramm-Loewner発展(SLE)によって、これらのフラクタルは数学的に分類することができることがわかってきた。スピン自由度を付随させたSLEが(1+1)次元の量子可積分系と結びついている点を見出したことは意義がある。

また、数学的に重要な対称多項式の研究を物理学における可解格子模型とその波動関数の研究に帰着させて発展させた点にも意義がある。

研究成果の概要(英文)：Geometric properties in the 2D critical phenomena can be classified by the Schramm-Loewner evolution. We have studied a relationship between SLE's and (1+1) quantum integrable systems. In particular, we found that SLE's with spin degrees of freedom can be associated with some quantum integrable systems. We have also investigated random fractals appearing in the critical 4-state Potts model and found a characteristic logarithmic behavior of crossing probabilities.

The partition functions of type B and C ice models have been investigated by using the quantum inverse scattering method. We have shown that the wavefunctions are expressed using generalizations of the symplectic Schur functions.

研究分野：数理物理学

キーワード：Schramm-Loewner発展 可解模型 量子可積分系 共形場理論 ベーテ仮説 輸送特性 対称多項式 Grothendieck多項式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

## 1. 研究開始当初の背景

一般的に、ランダムフラクタルの直接的で数学的に厳密な記述は、現代においても極めて困難な重要問題のひとつとして残されている。しかしながら、今世紀になり、ランダムフラクタルが2次元共形不変性を有する場合には、Schramm-Loewner 発展 (SLE) とよばれる2次元確率過程を用いて直接的かつ数学的に厳密性をもって記述されることが明らかになってきた。ここで、共形不変なフラクタルとは、その性質が共形変換 (等角写像: 局所的スケール変換) によって不変に保たれるものを言う。

一方、共形不変性は臨界現象において広く期待される概念である。特に、2次元においては、共形変換の生成子は無限次元の代数をなし、理論に強い制約が課される。これにより2次元共形場理論(CFT)は、2次元での臨界現象を分類する非常に強力な理論となっている。

このCFTとSLEの対応や、様々なCFTに対するSLEの拡張、そしてSLEの駆動関数である1次元ブラウン運動をBessel過程やDysonモデルに置き換えた多重SLEの定式化なども、研究代表者を含む研究者によって行われ、SLEはCFTの幾何的な側面を体現するものとして捉えることができるようになってきている。

## 2. 研究の目的

本研究の当初の目的は、有質量な可積分場の理論とSchramm-Loewner発展との対応関係の探求を目的とする。一方で、最近の研究代表・分担者や連携研究者らの研究によって、ある種のASEPが3次元可解模型や、グラスマン多様体のK理論と関連していることも明らかになっている。この1次元可積分確率過程の研究も併せて行うことにより、対応する2次元系のフラクタルに潜む数理解析の解明を目指す。

## 3. 研究の方法

量子可積分系とSchramm-Loewner発展との関係、また量子可積分系(可積分確率過程)と対称多項式との関係を、量子可積分系で発展された手法を用いて研究する。

また、可解格子モデルの臨界点に現れるフラクタルをSchramm-Loewner発展と数値解析の手法を用いて解析する。

## 4. 研究成果

以下のように、当初の研究目的に付随して、(1+1)次元量子可積分系とSchramm-Loewner発展との関連を調べた。特にスピン自由度を付随させたSchramm-Loewner発展と(1+1)次元量子可積分系の対応関係を研究した。また、これまで明らかにされていなかった、4状態PottsモデルのSLEクラスターを同定し、そのクラスターに関する対数補正の存在を明らかにした。

また、可積分確率過程と対称多項式の研究を行った。

### (1) Schramm-Loewner 発展と可解模型の研究

#### 4 状態 Potts 模型のスピンクラスター交叉確率の研究

4 状態 Potts 模型のスピンクラスター交叉確率に関する研究を行った。フラクタルは、臨界現象における特有の幾何学的性質であり、Schramm-Loewner 発展(SLE)により記述されることが知られている。4 状態 Potts 模型のスピンを取ることができる状態は4つあり、1 (スピニアップ) と2 (スピンドアウン) の状態をとる Ising 模型と対照的である。このため、スピンクラスター境界の種類も多様であり、SLE が記述するフラクタル(フラクタル次元  $3/2$ ) が、4 状態 Potts 模型のどのスピンクラスター境界に対応するか未解明であった。我々は、Monte-Carlo 法を援用することにより、SLE に対応するスピンクラスターの特定に成功した。また、そのスピンクラスターの交叉確率の  $\log$  補正を見出し、詳細な数値解析を行った。

#### Schramm-Loewner 発展と(1+1)次元量子可積分系

Schramm-Loewner 発展と(1+1)次元量子可積分系の対応の研究を行った。SLE にスピン自由度を付随させた場合、そのSLEはスピンCalogero-Sutherland模型に対応することを明らかにした。

## (2) 量子可積分系および対称多項式の研究

### Felderhof 模型の波動関数と対称多項式

研究代表者および分担者によって、あるクラスの可解格子模型や可積分確率過程が、グラスマン多様体の  $K$  理論と関連していることが見出されている。この研究では、Felderhof 模型の波動関数および双対波動関数と Schur 対称多項式との関連から、Schur 多項式における Tokuyama 公式の双対版を発見した。

また、あるクラスの対称多項式の組合せ論的側面を可解格子模型の観点から研究した。すなわち、量子群  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  に付随する可解模型の波動関数および双対波動関数から量子群的に拡張された Grothendieck 多項式の導出に成功した。さらに、この新たに見出された対称多項式の満たすさまざまな性質を、可解格子模型を利用して研究した。

### Izergin-Korepin 法を用いた対称多項式の研究

Izergin-Korepin 模型の解析を 6 頂点模型の波動関数に対して拡張する手法を、より扱いが難しくなる境界条件下や楕円型の模型に対して適用することにより、対称関数の研究を行った。例えば、XXZ 型 6 頂点模型の反射境界条件下における波動関数と対称関数の明示的対応を明らかにした。また、楕円多項式概念を組み込むことにより、楕円 Felderhof 模型の波動関数と楕円 Schur 関数との明示的対応を明らかにした。この結果は、Schur 関数の Tokuyama 公式の楕円版に相当する。更に、波動関数と対称関数の対応に基づき、対称関数の様々な代数等式を導出した。例えば、楕円 Felderhof 模型のスカラ積やドメイン壁分配関数より、楕円 Schur 関数の Cauchy 公式および双対 Cauchy 公式を導出した。

Foda-Manabe は nested Bethe 波動関数を含むような分配関数を最近導入した。楕円  $R$  行列を用いることでその楕円類似を導入し、その具体的な表示を Izergin-Korepin 解析の nested 版によって決定した。

また Shigechi-Uchiyama による Yang-Baxter 代数の多重交換関係式と Motegi-Sakai による 5 頂点模型の波動関数と Grothendieck 多項式の対応を用い、Grothendieck 多項式のある恒等式に関して、可積分系の観点からの証明を行った。また、Grassmann 束の  $K$  群から非特異多様体の  $K$  群への押し出し写像に関して新たな公式を導出した。

### B 型および C 型のアイス模型とシンプレクティック Schur 関数

量子逆散乱法を用いて、B 型および C 型のアイス模型の分配関数を研究することにより、ある種の対称多項式を見出した。具体的には、B 型のアイス模型の分配関数の研究により、シンプレクティック Schur 関数の一般化を行った。また、C 型のアイス模型に関して、その分配関数が Whittaker 関数を一般化したものであることを発見した。さらに、これらの模型のドメインウォール境界条件を考察することにより、一般化されたシンプレクティック Schur 関数および、Whittaker 関数の双対 Cauchy 公式を物理的な観点から初めて導出することに成功した。

## (3) その他

上記研究のほか、派生して以下の研究も行なった。

### 量子可積分系の輸送特性

spin-1/2 XXZ 模型のスピン輸送特性に関し、6 頂点模型の row-to-row 転送行列に成立する関数方程式 (T-system, Y-system) を用いて、Drude weight の厳密解を導出した。この方法の利点は、string 仮説を用いない点、有限サイズの Drude weight の振る舞いが解析できる点である。結論として、Drude weight は極めて強い有限サイズ効果を有することが明らかにされた。この研究によって、厳密対角化等の数値計算（および結果の外挿）による熱力学極限の厳密解との比較の相違は、非常に強い強い有限サイズ効果によるものであることが明らかにされた。

## 高速 Fourier 計算の量子アルゴリズムの開発

高速 Fourier 変換の量子計算への応用を考案し,量子回路へ実装するためのアルゴリズムを開発した. このアルゴリズムは,量子コンピュータを用いた並列画像処理など,将来的に広範な応用が期待される.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 8件）

1. 著者名 Motegi Kohei, Sakai Kazumitsu, Watanabe Satoshi	4. 巻 149
2. 論文標題 Quantum inverse scattering method and generalizations of symplectic Schur functions and Whittaker functions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 103571 ~ 103571
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.geomphys.2019.103571	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Motegi Kohei, Sakai Kazumitsu	4. 巻 1194
2. 論文標題 Izergin-Korepin approach to symmetric functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Physics: Conference Series	6. 最初と最後の頁 012077 ~ 012077
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1742-6596/1194/1/012077	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Motegi Kohei	4. 巻 2017
2. 論文標題 Izergin-Korepin Analysis on the Projected Wavefunctions of the Generalized Free-Fermion Model	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advances in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1 ~ 11
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1155/2017/7563781	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kohei Motegi	4. 巻 2017
2. 論文標題 Elliptic supersymmetric integrable model and multivariable elliptic functions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Progress of Theoretical and Experimental Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1093/ptep/ptx159	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Motegi Kohei	4. 巻 59
2. 論文標題 Symmetric functions and wavefunctions of XXZ-type six-vertex models and elliptic Felderhof models by Izergin-Korepin analysis	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 053505 ~ 053505
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1063/1.4986534">https://doi.org/10.1063/1.4986534</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Motegi Kohei	4. 巻 134
2. 論文標題 Scalar products of the elliptic Felderhof model and elliptic Cauchy formula	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 58 ~ 76
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.geomphys.2018.08.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kohei Motegi	4. 巻 -
2. 論文標題 Dual wavefunction of the Felderhof model	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1-29
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11005-017-0942-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Motegi Kohei	4. 巻 58
2. 論文標題 Combinatorial properties of symmetric polynomials from integrable vertex models in finite lattice	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 091703 ~ 091703
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5001687	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Motegi Kohei	4. 巻 80
2. 論文標題 Dual wavefunction of the symplectic ice	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Reports on Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 391 ~ 414
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/S0034-4877(18)30009-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fukushima Kimihiko, Sakai Kazumitsu	4. 巻 2019
2. 論文標題 Numerical study on a crossing probability for the four-state Potts model: Logarithmic correction to the finite-size scaling	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Progress of Theoretical and Experimental Physics	6. 最初と最後の頁 1 ~ 10
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/ptep/ptz101	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Motegi Kohei	4. 巻 954
2. 論文標題 Integrability approach to Feher-Nemethi-Rimanyi-Guo-Sun type identities for factorial Grothendieck polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nuclear Physics B	6. 最初と最後の頁 114998 ~ 114998
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.nuclphysb.2020.114998	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Motegi Kohei	4. 巻 61
2. 論文標題 A class of partition functions associated with $E_{\{\tau,\eta\}}(gl_3)$ by Izergin-Korepin analysis	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 053507 ~ 053507
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1063/1.5129567	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計17件(うち招待講演 5件/うち国際学会 4件)

1. 発表者名 堺 和光
2. 発表標題 SLEと(1+1)次元量子系の対応
3. 学会等名 日本物理学会第74回年次大会(九州大学)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Motegi
2. 発表標題 Izergin-Korepin approach to symmetric functions
3. 学会等名 Group 32 (Czech Technical University) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kazumitsu Sakai
2. 発表標題 Spin Drude weight in the XXZ chain at finite temperatures
3. 学会等名 Workshop "Correlations in Integrable Quantum Many-Body Systems" (Leibniz University Hannover, Hannover, Germany) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 茂木康平
2. 発表標題 可解格子模型の波動関数のIzergin-Korepin解析
3. 学会等名 可積分系の数理と応用(京都大学数理解析研究所)(招待講演)
4. 発表年 2017年



1. 発表者名 茂木康平
2. 発表標題 6頂点模型のIzergin-Korepin解析
3. 学会等名 日本数学会 2017年度秋季総合分科会（山形大学）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 堺和光, Andreas Klumper
2. 発表標題 スピン1/2-XXZ鎖のスピン輸送
3. 学会等名 日本物理学会 第73回年次大会（東京理科大学）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 茂木康平
2. 発表標題 楢円Felderhof模型と楢円Schur関数
3. 学会等名 日本数学会 2018年度年会（東京大学）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kazumitsu Sakai
2. 発表標題 Multiple Schramm-Loewner Evolutions for coset conformal field theory
3. 学会等名 Boundary Degrees of Freedom and Thermodynamics of Integrable Models (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 茂木康平
2. 発表標題 可解格子模型の分配関数と対称多項式
3. 学会等名 日本数学会2016年度秋季総合分科会（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 福住吉喜, 堺和光
2. 発表標題 シュラム・レヴナー発展のコセット構成
3. 学会等名 日本物理学会2016年秋季大会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 加藤岳生, 和田義人, 桂法称, 堺和光
2. 発表標題 近藤模型のベータ仮設解と形状因子
3. 学会等名 日本物理学会2016年秋季大会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 福島君彦, 堺和光
2. 発表標題 4状態Potts模型におけるスピんクスター交叉確率
3. 学会等名 日本物理学会 2019年秋季大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 浅香諒, 堺和光, 矢萩量子
2. 発表標題 量子回路への高速フーリエ変換の実装
3. 学会等名 量子情報技術研究会 (QIT)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazumitsu Sakai
2. 発表標題 The spin transport in integrable quantum systems
3. 学会等名 Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 浅香諒, 堺和光, 矢萩量子
2. 発表標題 高速フーリエ変換の量子回路への実装
3. 学会等名 日本物理学会第75回年次大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 石川和樹, 堺和光, 佐藤純
2. 発表標題 1次元超対称t-J模型における量子輸送特性
3. 学会等名 日本物理学会第75回年次大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 堺和光, Andreas Klumper
2. 発表標題 XXZ鎖におけるスピン輸送特性のフラクタル構造
3. 学会等名 日本物理学会第75回年次大会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Researchmap <a href="https://researchmap.jp/kazumitsusakai/">https://researchmap.jp/kazumitsusakai/</a> 東京理科大学 <a href="https://www.tus.ac.jp/fac_grad/p/index.php?6ce6">https://www.tus.ac.jp/fac_grad/p/index.php?6ce6</a>
---

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	茂木 康平  (Motegi Kohei)  (30583033)	東京海洋大学・学術研究院・准教授    (12614)	