

令和 2 年 5 月 29 日現在

機関番号：12301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2019

課題番号：16K12789

研究課題名(和文) 数学教育における投象を取り入れた開発教材の空間認識力への影響に関する研究

研究課題名(英文) Effect of Mathematical Learning to Draw Based on Projection on Spatial Ability

研究代表者

澤田 麻衣子 (Sawada, Maiko)

群馬大学・教育学部・准教授

研究者番号：20645246

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は投象という概念を取り入れた幾何教材の検証と、幾何教材学習前後の中学生の空間認識力の変容を明らかにすることを目的としたものである。2つの中学校で1年生を対象に、授業実験ならびにMCT(Mental Cutting Test)及びMRT(Mental Rotations Test)による調査、質問紙による調査を実施した。その調査結果から、投象という概念を取り入れた幾何教材による学習の空間認識力への効果を認めることができ、また見取図と投影図の問題解決にも影響を与えることが分かった。このことから、投象の概念を取り入れた学習を通して、空間図形の図を読み、図に表現することの学習の必要性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

空間認識力は学習場面だけでなく汎用されることの多い基礎的な能力である。この空間認識力を養う場として、算数・数学の授業で扱う「空間図形」の学習の場がある。本研究はこれまでに開発してきた投象という概念を取り入れた幾何教材が、数学という教科の学習のねらいとする学問知識の獲得だけでなく、基礎的な能力としての空間認識力への効果へも期待できるものであることを検証することを意図したものである。これまでの理論的側面からの教材開発と数学教育現場における教材の評価に本研究結果が加わることで、学問知識の獲得と基礎的な能力としての空間認識力の育成を満たす幾何教材の提案と教材開発の発展につながるものである。

研究成果の概要(英文)：In order to clarify the effect of mathematical learning to draw based on projection, we conducted experimental classes and two types of surveys for junior high school students. One was to measure the spatial ability (Mental Cutting Test: MCT, Mental Rotations Test: MRT), and the other were mathematical questions of projection diagrams and sketches. We have found that our learning materials are effective for student's spatial ability and the ability to read figures of solids. Also, we found that the ability measured by MCT is related to the reading projection diagrams and sketches. This survey shows the necessity of learning to read and to draw figures of solids based on projection in mathematics classes.

研究分野：算数・数学教育

キーワード：幾何教育 空間認識力 投象 教材開発 中学生

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

空間認識力は映像を用いた情報伝達やコミュニケーションの浸透とその技術促進において求められる力であり、日常生活や社会生活でも汎用される基礎的な能力である。また算数・数学を行なう場面だけでなく、他の学問や日常においても汎用されることの多い能力である。

算数・数学教育における図形学習の場は、空間認識力を論理的、系統的、抽象的に図形や空間を扱うことを通して養うことができる場である。この場における幾何教材開発に取り組む中、投象 (projection) の概念を幾何カリキュラムに取り入れることに着目し、中学生を対象とした発展教材を開発してきた。教材の有効性は生徒の変容をもって示されているが、人の基礎的な能力としての空間認識力にどの程度影響を与えるものかまでは明らかとなっていない。また、算数・数学教育における教材開発研究では、授業現場における生徒の変容や教科教育の視点から教材を考察することを主としており、客観的指標により生徒の能力の変容を測り、教材を検証するという知見は少ない。その力の育成に係る教材開発を具体的な客観的指標を用いて、人の基礎的な能力へ影響という側面から明瞭化すると同時に、空間認識力を養う算数・数学の教材を具体的に提示することが必要である。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、初等中等教育の算数・数学の授業場面で投象を取り入れた教材を実施し、その教材の効果を算数・数学教育現場の視座だけでなく、基礎的な能力としての空間認識力を育成するという側面から考察し、明瞭化することである。

### 3. 研究の方法

投象の概念を用いた幾何教材を、中学1年生を対象に実施し、その前後の空間認識力の変容を測り、考察することで教材の空間認識力の育成に関する効果について示す。対象を中学1年生とした理由は、本教材を学習する前提として、空間図形を平面上に表す方法 (見取図、展開図、投影図) についての知識を要するためである。

#### 実施教材について

教材内容は先行研究から開発をすすめてきた教材「投象を用いて立体図形を見て描く」を基本として行った。扱った投象図は、平行投象に含まれる図で、アフィン幾何により説明できる。学習内容は次の4つの展開により構成されている。

- ・ 展開1: 生徒一人ひとりがこれまでの学習経験などを通して理解してきた 数学的に整理された空間図形の特徴や性質を確認する。
- ・ 展開2: 立体の形状を定めることができる平面図・立面図・側面図の3つの図 (正投影図) を描く。
- ・ 展開3: 仰角45度の副投象図 (実際に目の前に正三角柱を正面に置いたときに斜め上の角度から見た時に近い図) を描く。
- ・ 展開4: 斜投象図を扱い、見取図として用いられることも多いキャビネ投象の図を描く。

#### 授業実験について

その内容の授業を、単元「空間図形」を学習した中学1年生を対象に実施した (表1)。各中学校での授業は各校各クラスの数学科担当教員により行われ、筆者はTAとして全クラスの授業にかかわった。

表1 授業実験実施人数と実施日程

		A 中学校	B 中学校
人数		134名 (4クラス)	35名 (1クラス)
実施日	授業実験前調査	2017/12/12	2018/1/23
	授業実験	2017/12/12~20 (各クラス4時間)	2018/1/23~30 (6時間)
	授業実験後調査	2017/12/21	2018/1/30

#### 調査について

##### (1) 空間認識力の変容について

授業実験前後に、MCT (Mental Cutting Test) と MRT (Mental Rotations Test) を用いた調査を行った。図学教育における先行研究により、MCT は図から立体をイメージする能力を、MRT は図形のイメージ内回転能力を測定することが分かっており、これらは空間認識能力の異なる側面を測定することも分かっている。図学教育の分野では大学生の図学教育のために、MCT や MRT など空間認識力を測る客観的指標を用いた調査から、図学テスト結果との関連、さらにはアイマーカーカメラによる生理学的データの解析結果による研究、また、学習指導要領改訂が及ぼす大学生の空間認識力への影響に係る調査も実施され、初等中等教育の幾何教育の影響についても述べられている。そこで、本研究は理論的側面からの提案と教育現場における実践により開発した教材を、学問知識の獲得に係る検証とは視点を変え、人の基礎的な能力としての効果という点により検証するために、知見が充実している MCT と MRT を用いた。

##### (2) 数学の問題解決への影響について

2つの調査問題を準備した。授業実験前に実施した調査問題 Ⅰ は、生徒の特徴や背景を捉えるための質問と、立体の見取図を描くという問題を設定した。見取図は空間図形の形全体の様子を一目でとらえることができるよう示された図として学習する。そのため、個々が形成する空間図形のイメージに近い図であり、様々な空間図形に関する問題解決の場面において用いられている図である。授業実験後に実施した調査問題 Ⅱ は、数学の学習場面でも扱われる、見取図を用いた立方体の切断面の問題と投影図から空間図形をイメージする問題とした。

#### 4. 研究成果

##### (1) 投象の概念を用いた幾何教材の空間認識力への効果

先行研究から、MCTの各問題は、切口のボタンが判別できれば正解を得られる問題(パタン判別問題)と、切口の辺の長さやなす角など量的な判別を行わなければならない問題(量判別問題)があること、さらに問題は4つのタイプ、( )学年が上がるに伴って正解率が上昇する問題(単純な立体のパタン判別問題)、( )小学校低学年においても正解率が高い問題、( )中学校の頃から正解率が大きく上昇する問題(複雑な立体のパタン判別問題)、( )どの学年においても正解率が低い問題(量判別問題)があることも述べられている。授業実験前のMCTの結果は、( )( )に含まれる問題の正解率が高く、順に( )( )に含まれる正答率が低い傾向が見られ、先行研究の結論に類似した様子を確認することができた。MRTは先行研究により問題の正解率と問題後半における着手率がMRTにより評価される空間認識力となることが述べられている。授業実験前のMRTの結果も、高得点者と着手率の関連から先行研究と同様の様子を確認することができた。さらに、MCTとMRTとの相関も強い相関がないことが示され( $r = .465, p < .001$ )、異なる空間認識力を測定していることが認められた。

このような授業実験前の状況をふまえ、授業実験前後のMCTとMRTの得点結果について比較した。結果、両者とも有意な平均点差が認められた(表2)。さらに先の( )~( )の4つのタイプに着目してMCTの得点結果をみたところ、( )に分類される問題の正答率が大きく上がり、イメージ形成能力の中では複雑な立体のパタン判別することへの効果が認められた。MRTについては、着手率及び着手者の平均点に着目した。結果、着手率の上昇(図1)と同時に、着手者の平均点も上昇(図2)していることが認められ、イメージ内で図を回転することがスムーズにかつ正確に行わるようになったことがわかり、MRTで測定できる空間認識の力も上昇することが示された。さらに、授業実験後のMCTとMRTとの相関についてはある程度の相関はあるものの強い相関はないことが示された。よって、異なる側面の空間認識能力に本教材の効果を認めることができた。

表2 授業実験前後のMCT、MRT得点の平均点差

	授業実験前	授業実験後	t値
MCT: 各1点×25問	11.85 (4.45)	12.88 (4.71)	-4.1153 p<.001
MRT: 各2点×20問	22.25 (7.52)	30.77 (7.02)	-18.839 p<.001

( )内は標準偏差

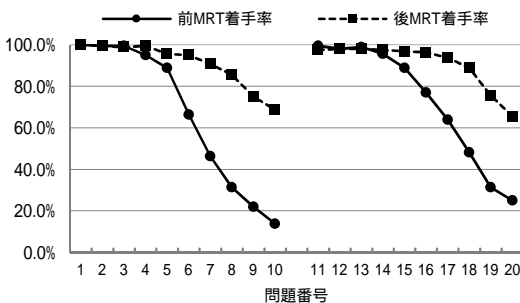


図1 授業実験前後のMRTの着手率

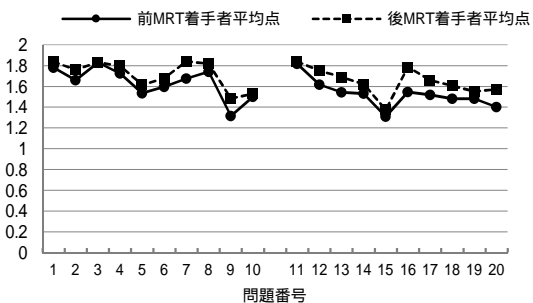


図2 授業実験前後のMRTの着手者平均点

##### (2) 空間認識力の変容と見取図、投影図を読む力との関連

数学の読図問題として取り上げたのは、見取図と投影図の問題である。見取図の問題は全国学力・学習状況調査でも平成22、28、29年度に実施されている。これら問題で扱われている立体は立方体であるが、年度によって正答率にバラつきが見られる。本調査では「立方体」という言葉と立方体の見えない1つの頂点と3つの辺が削除された見取図をもとに切断面を考える問題とした(図3)。投影図の問題は、全国学力・学習状況調査で平成27年度に三角柱の投影図(立面図と側面図)を読む問題が実施されている。多くの中学生が既習の立体の投影図を読むことができているという結果となった。そこで、既習の立体以外にも、様々な空間図形についても読めるかをみるために、本調査では立方体を複数個用いて形成される立体の投影図を考える問題とした(図4)。実際に用いた図はPISA2006の問題例として提示されているものである。図によって表現される立体の構成に必要な小さな立方体の個数の最大数と最小数を解答するもので

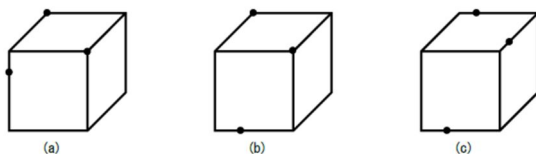


図3 見取図を読む問題の図

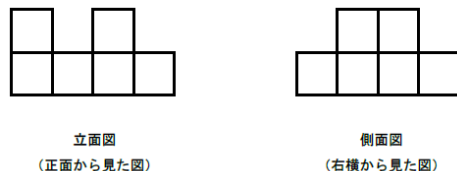


図4 投影図を読む問題

ある。

見取図の問題(図3)の正答率はそれぞれ(a)二等辺三角形 59.0%、(b)等脚台形(台形)67.3%、(c)六角形 53.2%、全問正答は 41.5%であった。各問題を正答とそれ以外に分け、図表現学習前後の MCT と MRT の平均点差について対応のある  $t$  検定を行った。結果、MRT はすべてのグループにおいて有意差が認められた(5%水準)。MCT は(a)(b)の正答者に、(c)は正答かどうかによらず有意差が認められた(5%水準)。 (a)(b)は、立方体の描かれていない辺や頂点、面を補うことだけで解決できる。一方(c)は、(a)(b)の操作に加えて与えられていた3点のうち手前にある2点を結んだ線と予め描かれていた辺との交点、さらに補った見えない辺上のその交点と対称な位置にある点を統合させて切り口を考えるという複雑さが加わる。

投影図の問題(図4)の最大数の正答率は 48.7%、最小数の正答は 14.1%、両者正答は 9.6%であった。最大数で立体を構築するには、投影図に従い隙間なく並べることができれば回答にたどり着く。一方、最小数で構築するには、立面図と側面図の情報を統合させると同時に、イメージ内で見る角度を変えながら立方体の間に空間を作る操作を要する。さらに各問題を正答した者とそれ以外に分け、図表現学習前後の MCT と MRT の平均点差について対応のある  $t$  検定を行った。MRT はすべてのグループにおいて有意差が認められた(5%水準)。MCT は最大数については正答者に対して、最小数については正答しなかった者に対して有意差が認められた(5%水準)。

これら結果から、本教材の学習により MCT で測定できる能力が向上し、その向上と(a)(b)のような見えない点、辺、面を補うことだけで解決できる見取図の問題、隙間のない立体の投影図の問題の解決には関連があることが分かった。一方で、それぞれの図において読み取ることに複雑さを含む図には、MCT と MRT で測定される能力以外のものの影響が示唆される結果となった。

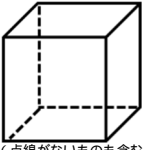
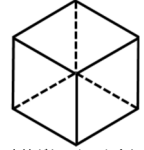
### (3) 投象の概念を用いた幾何教材の見取図を読む力への効果

空間図形を平面上に表す方法として、小学校では見取図、展開図、中学校では投影図を扱う。中でも見取図は空間図形の形全体の様子を一目でとらえることができるよう示された図として学習する。そのため、個々が形成する空間図形のイメージに近い図であり、様々な空間図形に関する問題解決の場面において用いられる。そしてこのように学習した図は、高校数学ではベクトルや積分の内容を扱う際にも活用される。一方、我々は算数や数学の学習場面だけでなく、日常生活においてもこれら図を利用し、空間に在る図形や3次元空間について思考している。つまり、中学校までの算数・数学の学習を通してだけでなく、日常生活や高等学校における数学の学習経験を通して、空間図形を表現した図を読み、空間図形を図に表現するための力を養っている。そこで、本研究と同時期(2017年前期)に、大学1年生(112名、全員が高校時に数学 ABを履修)を対象に実施した、本研究の調査問題、に相当する調査問題の結果と、本研究の授業対象者であった中学生の結果を比較することで、本教材の効果について考察した。

調査問題(に該当する調査問題)の結果から、大学生、中学生によらず表3(あ)のような図を立方体の見取図として描かれていた。つまり、学習経験によらず立方体のイメージとして定着している、馴染みのある図は表3(あ)のようなものであることが分かった。そこで、それぞれから表3(あ)の図を描いた者を抽出し、調査問題(に該当する調査問題)の図3の問題の解答結果に着目することとした。正答率は、(a)が大学生 45.1%、中学生 60.9%、(b)が大学生 31.9%、中学生 67.1%、(c)が大学生 37.4%、中学生 53.1%となった。この結果から、現在の学習内容と学習経験では空間図形の図を読む力に対して充足しているとは言い難いこと、一方で、本教材の有効性を認めることができた。

また、調査問題(に該当する調査問題)の日常生活や過去の学習経験に対する質問項目の結果と図3の問題の解答結果から、大学生、中学生とも過去において文章を書くことに興味を持っていたという、という内容に関連がみられた(カイ二乗検定)。数学は言語・記号を用いる言語活動が重要である。空間認識力と図を読むことと、言語活動との関連を示唆することができ、次の研究の課題を見出すことができた。

表3 立方体の見取図に関する調査結果

描かれた図	 (点線がないものも含む) (あ)	 (点線がないものも含む) (い)	その他
大学1年生	81.3%	6.3%	12.5%
中学1年生	82.1%	14.1%	3.8%

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 澤田麻衣子・正法院和彦	4. 巻 31
2. 論文標題 空間図形の図表現の重要性に着目した教材開発	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 実践研究	6. 最初と最後の頁 16-27
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 1件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 澤田麻衣子
2. 発表標題 MCT および MRT による中学生の空間認識力に関する評価
3. 学会等名 2018年度数学教育学会春季年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 澤田麻衣子
2. 発表標題 空間図形の図表現学習前後におけるMCT および MRTの結果
3. 学会等名 2018年度数学教育学会秋季例会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 澤田麻衣子
2. 発表標題 空間図形の図表現学習の効果について
3. 学会等名 2019年度数学教育学会秋季例会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 澤田麻衣子
2. 発表標題 算数・数学的に空間認識の力を養う学習内容に関する一考察
3. 学会等名 2020年度数学教育学会春季年会 (Organized Session B) (招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考