

令和元年6月21日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13150

研究課題名（和文）フレーゲ論理学の証明論的および意味論的研究

研究課題名（英文）Proof theoretic and semantical study of Fregean Logic

研究代表者

佐藤 雅彦（Sato, Masahiko）

京都大学・情報学研究科・名誉教授

研究者番号：20027387

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000円

研究成果の概要（和文）：フレーゲは、「数学を論理に還元する」論理主義を実行するために、史上初めて高階述語論理を完全な形で整備し、分析哲学の源流となり、同時にヒルベルトの形式主義への道を開いた。しかしながら、フレーゲがその著書『Grundgesetze der Arithmetik』で構築した論理体系は、ラッセルが指摘した有名なパラドックスにより矛盾を含むことが明らかになった。そのため体系が不備であることの原因を究明する研究はほとんどなかった。本研究はその根本原因を証明論的および意味論的手法により解明することを目指した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

フレーゲの論理学におけるラッセルパラドックスの原因の究明は数学的対象の存在論の哲学的分析を深化させるものであり、その学術的意義は大きい。  
また、この研究により得られた論理学的成果は現実社会においても日常的に用いられている言語使用の理解にも寄与するものであり社会的にも意義のある成果である。

研究成果の概要（英文）：In order to carry out the logicism program of reducing mathematics to logic, Frege for the first time in history organized higher-order predicate logic. Thereby, he also initiated analytic philosophy and opened a way to Hilbert's formalism. However, the logical system he created in his 'Grundgesetze der Arithmetik' was found to be inconsistent due to the paradox pointed out by Russell. Because of this, not many attempts have been made to clarify the cause of the inconsistency of his logical system. The study aimed to find the cause by proof theoretical and semantical methods.

研究分野：数理論理学

キーワード：フレーゲ論理学 証明論 無矛盾性

## 1. 研究開始当初の背景

(1) フレーゲが史上初めて体系化した高階述語論理は哲学のみならず論理の数学化に決定的な寄与をしてきた。フレーゲの論理哲学は、1970年代以降、分析哲学の枠組みにおいて盛んに研究されるようになってきており、たとえば新フレーゲ主義（ブーロス、ヘック他）の研究はよく知られている。

(2) 他方で、フレーゲの体系は計算機科学の発展に伴う型理論において注目されてきた。たとえば、アクツェルは水平線に異議を唱えて、フレーゲ的論理世界を実現する Frege Structure を提案し、本研究代表者は Frege Structure に証明を対象として追加する拡張を提示している (Springer Lecture Notes in Computer Science 526, 1991)。

(3) また、フレーゲの体系は計算機科学における証明支援系 (Proof Assistant) の文脈でも興味深いことが本研究代表者により指摘されている (『科学哲学』 38-2, 2006)。しかし、こうした観点からのフレーゲへの本格的なアプローチは依然としてほとんどなかったといえる。

## 2. 研究の目的

フレーゲは、「数学を論理に還元する」論理主義を実行するために、1800年代後期に、史上初めて高階述語論理を完全な形で整備し、分析哲学の源流となり、同時にヒルベルトの形式主義への道を開いた。しかしながら、フレーゲがその著書『Grundgesetze der Arithmetik』で構築した論理体系は、ラッセルが指摘した有名なパラドックスにより矛盾を含むことが明きらかになった。

そのため、体系が不備であることの原因を究明する研究はこれまでほとんどなかった。本研究は、(1) その根本原因を証明論的および意味論的手法により詳細に分析・解明し、(2) フレーゲの判断論の再検討を通して、現代の論理学研究に新しい見地を与えることを目的とする。

## 3. 研究の方法

(1) 矛盾の原因解明については、フレーゲの『Grundgesetze』における有意味性証明を計算機科学におけるテイト＝ジラルの手法により分析し、矛盾の真の原因を突き止める。

(2) 判断論の再検討についてはフレーゲの判断論に証明を体系内部の存在者として認める拡張をし、拡張された体系の証明支援系による実装を行う。さらに、フレーゲの判断論の限界を超えることの哲学的意義も考察する。

## 4. 研究成果

(1) フレーゲ論理学の構文論と意味論。フレーゲは当時のヒルベルト以前の単純な形式主義や心理主義的な数学の解釈にあきたらず、自然数や実数といった基礎的な数学的対象を、彼の論理主義的方法論で構築するという構想のもとで、歴史上はじめて量化記号を有する公理的体系を樹立し、体系の意味論も詳述した。さらに、彼の体系を統語論的半形式言語として扱うものであり、彼の母語であるドイツ語をメタ言語として、対象言語である (記法としての) Begriffsschrift を説明するという特徴がある。すなわち、フレーゲは、後にクワインが強調した使用 (use)、言及 (mention)、引用 (quotation) といった、メタ言語-対象言語にまつわる言語現象を既に正しく認識していた。

対象言語とメタ言語については、その背景には対象レベルとメタレベルの違いがあるということを確認しておきたい。つまり、メタ言語 M を用いて対象言語 O について語るという状況において、M はメタレベルに置き、O は対象レベルに置いて考えることができる。このとき、O と M は異なる言語である必要はなく、同じ言語であってよい。その場合もレベルの違いは残るのである。さらに言えば、メタレベル、対象レベルの違いは、フレーゲが文の意味 (bedeutung) を関数適用 (関数を対象に適用) の値として分析したことも関連づけ

ることができると思える。つまり、関数はメタレベルに属する高階の存在者であり、項は対象レベルに属する一階の存在者とみなすことができる。言語という統語論的对象の世界にレベルの違いがあるように、意味の世界にも、関数と対象というレベルの違いを認識することにより「文脈原理」が得られたと考えることができる。(2) 判断線の主張力。フレーゲによれば、判断線「|」はすべて概念記法命題「 $\vdash \Delta$ 」の先頭にあつて、後続する「 $-\Delta$ 」の意味が真理値真であることを主張する特別な記号であるとされる。しかし、任意の名前「 $-\Delta$ 」の先頭に判断線を加えるだけで主張力が発生するわけではない。『算術の基本法則』中の構成 (Aufbau) における判断線の使用状況を見るまでもなく、概念記法命題は、ある証明の結論として書かれることによって始めて主張力を持つのである。証明という文脈に判断線が置かれているということが主張力の内実であり、主張力は、判断線にあるのではなく、それが置かれている証明にあると思える。

では、 $\Pi$  が「 $\vdash \Delta$ 」を結論とする証明であるとき、証明  $\Pi$  の主張力はどこからくるのであろうか。証明  $\Pi$  が持つ主張力は、 $\Pi$  が基本法則と推論規則を正しく組合せて形成されていることによつてのみもたらされるのである。論理的な推論ステップを間違いなく実行するという行為が主張力を生むのである。

拡張概念記法のために導入した 1 階 2 項関数名「 $\vdash (\xi, \zeta)$ 」はこのような主張力の分析に基づいている。ここでの記号「 $\vdash$ 」は「特別な記号」ではなく、単なる関数名でありそこにはなんら主張力はない。「 $\Pi \vdash \Delta$ 」の意味が真理値真であるとき、 $\Pi$  は主張力を持つ正しい証明であり、そうでないとき、 $\Pi$  は主張力のない誤った証明にすぎない。したがつて、フレーゲの体系が矛盾を含むようになった根本原因は、彼の判断線に主張力を持たせる根拠たる証明を彼の体系内の存在者として措定できなかったことにあると考えられる。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 1 件)

① 佐藤 雅彦, フレーゲ哲学の現代的意義 - 野本和幸著『フレーゲ哲学の全貌』を読む -, 科学哲学, 査読有, 49 卷, 2016, 67-84.

[学会発表] (計 7 件)

① Masahiko Sato, Reflections on the  $\eta$ -rule of the  $\lambda$ -calculus, Oberseminar Mathematische Logik, (LMU Munic, Mathematisches Institut), 2019.

② Ryota Akiyoshi, Takeuti's Finitism Revisited, Theory Seminar (Swansea University, Department of Computer Science), 2019.

③ Masahiko Sato, A common notation system for the  $\lambda$ -calculus and combinatory logic, Second Workshop on Mathematical Logic and its Applications, 2018.

④ Ryota Akiyoshi, "Proofs as Programs" Revisited Oberseminar Mathematische Logik, (LMU Munic, Mathematisches Institut), 2018.

⑤ Ryota Akiyoshi, Gentle Introduction to the Omega-Rule: Part II, Institut d'histoire et de philosophie des sciences et des techniques, Université Paris, 2018.

⑥ Masahiko Sato, A common notation system for both lambda calculus and combinatory logic, Oberseminar Mathematische Logik, (LMU Munic, Mathematisches Institut), 2017.

⑦ Ryota Akiyoshi, Gentle Introduction to the Omega-Rule: Part I, Institut d'histoire et de philosophie des sciences et des techniques, Université Paris, 2017.

[図書] (計 1 件)

① Masahiko Sato (K. Mainzer, P. Schuster and H. Schwichtenberg Eds.), World Scientific, Proof and Computation – Digitization in Mathematics, Computer Science, and Philosophy –, 2019, 191–207.

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名： 秋吉 亮太

ローマ字氏名： (AKIYOSHI, Ryota)

所属研究機関名： 早稲田大学

部局名： 高等研究所

職名： 招聘研究員

研究者番号： 20587852

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。