

令和元年6月6日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13744

研究課題名(和文) 超平面配置の自由性・トポロジーとランダムウォークの新潮流

研究課題名(英文) New developments on the freeness and topology of hyperplane arrangements, and random walks

研究代表者

阿部 拓郎 (ABE, TAKURO)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・准教授

研究者番号：50435971

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、(1)自由配置という良いクラスの超平面配置のトポロジカルな良い理解を得ること、及び(2)それを用いてBHR乱歩という確率論と自由配置との関係を探ること、を目標としていた。結果として、乱歩との関係については実験的な考察にとどまったものの、トポロジカルな理解は相当程度進展した。具体的には、位相幾何的不変量である特性多項式が超平面配置の自由性に関する加除定理を支配していることがわかった。特性多項式は超平面配置の組合せ論的不変量でもあるため、加除定理が組み合わせ論的に決定されるという、極めて強力な結果を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

超平面配置とはベクトル空間中の超平面の有限族である。具体的には、平面中の直線や空間中の平面たちなどが一例となる。これらの様々な性質、例えばこれらが平面や空間をいくつに分割するかなどといった問題を、他の性質と関連付けることが超平面配置の研究である。本研究計画においては、この性質の中でも自由性と呼ばれる極めて良い代数的性質が、新しく超平面を加えたり減らしたりする際にどのように変化するかを考察し、それがトポロジーや組合せ論という、違う側面から完全に統制されていることを証明した。このように、代数的性質が何かで支配されている例は稀であり、超平面配置研究における大きな進展を得たという学術的意義がある。

研究成果の概要(英文)：The aim of this research project is (1) to obtain a good topological understanding of the free hyperplane arrangements, and (2) to relate random walks with free arrangements by using (1). As results for (2), we have only obtained some experimental studies. However, for (1), we obtained better results than expected. Namely, we proved that whether we can apply the addition-deletion theorems for free arrangements or not depends only on the characteristic polynomial, a topological invariant of arrangements. Since characteristic polynomials are also combinatorial invariant, we could show that the addition-deletion theorems are combinatorial, which are very strong results in arrangement theory.

研究分野：超平面配置

キーワード：超平面配置 自由配置 加除定理 旗代数 剰余的自由配置 剰余旗 BHR乱歩 特性多項式

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

超平面配置における重要な研究課題の一つが、その代数的対象たる対数的ベクトル場の研究であった。特にそれが自由加群となると、そのような配置を自由配置と呼び、齋藤恭司氏による導入以降、寺尾宏明氏らを中心に盛んに研究が進められてきた。自由配置の代数的側面は結果的に相当進展しているが、他方自由配置はどのような幾何・組み合わせ論を持つ配置であるかという問題については、本質的な進展はほとんど存在しなかった。このような状況において研究代表者は、2015年に、自由超平面配置に関する画期的な新概念である、剰余的自由配置を導入するプレプリントを執筆した。これは超平面配置の旗が特性多項式の剰余という位相幾何的・組み合わせ論的条件を満たせば、配置は自由になる、というものである。このような旗は剰余旗と呼ばれているが、このように位相幾何・組み合わせ論の情報のみで自由配置の決定が広範囲に可能というのは、これまで全く知られていなかった。以上が研究開始当初の背景である。

### 2. 研究の目的

剰余的自由配置の理論により、ある良い自由配置のクラスに対しては、その代数構造を位相幾何・組み合わせ論的に解釈することが可能であることが分かった。この新しい発見をもとに、研究代表者は(剰余的)自由配置の位相幾何・組み合わせ論、更には乱歩を用いた理解を構想した。すなわち、剰余旗あるいは旗といったシンプルな位相幾何・組み合わせ論の対象から開始して、自由性を位相幾何的に理解することを目的とした。具体的には超平面配置の補空間のホモロジー群の元の言葉で、剰余旗と剰余的自由配置を理解することが目的であった。更にこの理解を用いて、補空間の連結成分上の確率論的現象、いわゆる BHR 乱歩と自由性を関連付けることも目指した。

### 3. 研究の方法

剰余的自由配置理論の完成に鑑み、研究代表者は、自由配置の位相幾何的理解の推進を構想した。当初の研究方法は、剰余旗を Schechtman-Varchenko の旗代数を通して超平面配置の補空間のホモロジー群の元とみなすことで、剰余旗はホモロジー群のある元として理解できることを基盤としていた。この対応を深く理解することで、位相幾何的な自由性の特徴づけを与えることを目指した。そのために、旗とそれに関連する自由配置の加除定理と位相幾何・組合せ論との関係を深く研究することも想定していた。同時に旗代数は、超平面配置の部屋や face 上の BHR 乱歩の固有ベクトルとも関係があるため、この対応をもとに剰余的自由配置と BHR 乱歩との関係を明らかにすることで、自由配置と各理論の架け橋を作ることを目指した。

### 4. 研究成果

研究を開始してゆくと、想像以上に剰余旗の特定が難しいことが判明した。更に特定できたとしても、旗代数とホモロジー群との間の写像が極めて扱いづらいものであり、ここがボトルネックとなってしまうその部分の解消が求められた。すなわち、自由性と旗あるいは超平面それ自身との関係を位相幾何や組み合わせ論的に精査する必要に直面したわけである。そこでより性質の良い旗として、まず局所重旗の理論を L. Kuehne 氏と展開した。これは超可解配置という極めて良い性質を持つ自由配置と関係しており、この旗を持つ場合の旗代数的理解をある程度促進することができた。本結果は様々な広がりを見せたため取りまとめには至っていないが、現在鋭意論文を作成中である。

次に、旗を作るための最初のステップである、自由配置への超平面の加法及び自由配置からの超平面の除去という極めて基本的なステップについて大きな研究進展を得た。自由配置への加法・除去がやはり自由かどうかは、寺尾の加除定理と呼ばれる定式化が存在していた。これらは、元の配置が自由なとき、加法あるいは除去が自由であるための必要十分条件として、制限配置の自由性とそれらの自由配置の間の指数の包含関係を要求していた。研究代表者はこれを、局所化の特性多項式たちの剰余関係に置き換えることに成功した。特性多項式は補空間のポアンカレ多項式と同値であるため、加除定理が位相幾何的であることを示したと云ってよく、自由配置の位相幾何的理解は大きく進展した。更に特性多項式は組み合わせ論的にも決定されるため、加除定理は組み合わせ論的である、という極めて強い主張を示すことにも成功した。これらにより剰余旗の特定方法が相当程度進展した。

更に多数の超平面への制限・加法・除法と自由性を論じる、多数加除制限定理を寺尾宏明氏とともに証明した。多数に一度に制限できる場合は特殊ではあるが、一気に剰余旗が作れることもあるため、本研究計画に沿った重要な進展である。

上記の理由により、本研究は位相幾何的な理解の進展が研究の大きな部分を占めたため、BHR 乱歩については、研究分担者の白井朋之教授との議論を基礎とした、実験的な考察の実施にとどまった。この実験的な考察からは、剰余的自由配置と対応する BHR 乱歩の間には明確な関係はまだ見えてきていない。しかし上記結果により今後の剰余旗と旗代数、BHR 乱歩の関係の研究は極めて進めやすくなったと考えており、この関係については今後も研究を深めてゆく予定である。これらの成果・考察を勘案した上で、本研究の研究目的はある程度達成できたと考えている。

## 5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計2件)

1. T. Abe, Deletion theorem and combinatorics of hyperplane arrangements, *Mathematische Annalen*, to appear. DOI:<https://doi.org/10.1007/s00208-018-1713-9> (査読あり)
2. T. Abe and H. Terao, Multiple addition, deletion and restriction theorems for hyperplane arrangements, *Proceedings of the American Mathematical Society*, to appear. DOI: <https://doi.org/10.1090/proc/14592> (査読あり)
3. T. Abe and A. Dimca, Splitting types of bundles of logarithmic vector fields along plane curves. *International Journal of Mathematics*. Vol. 29 (2018), no. 8. (査読あり)

[学会発表](計16件)

1. T. Abe, Combinatorics of the addition-deletion theorems for free arrangements, CIMPA - IMH Research School HYPERPLANE ARRANGEMENTS: RECENT ADVANCES AND OPEN PROBLEMS, at VAST, Hanoi, Vietnam, 2019年3月21日.
2. T. Abe, Combinatorics of the addition-deletion theorems for arrangements, On hyperplane arrangements, configuration spaces and related topics, at Hokkaido University, Sapporo, 2019年2月21日.
3. 阿部拓郎, 自由超平面配置の加除定理の組み合わせ依存性, 数理科学談話会, 信州大学, 2018年11月29日.
4. 阿部拓郎, 超平面配置の対数的ベクトル場と自由性, 日本数学会秋季総合分科会特別講演(代数学分科会), 岡山大学, 2018年9月27日.
5. T. Abe, The  $b_2$ -equality and free arrangements, New perspectives in hyperplane arrangements, at Ruhr University Bochum, Bochum, Germany, 2018年9月14日
6. 阿部拓郎, 超平面配置の代数・自由性と組み合わせ論, 組合せ論サマースクール 2018, KKR 伊豆長岡千歳荘, 2018年8月9日
7. T. Abe, Generators for logarithmic derivation modules of hyperplane arrangements, Topology and Geometry: A conference in memory of Stefan Papadima (1953-2018), at Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Bucharest, Romania, 2018年5月29日.
8. T. Abe, Generators of logarithmic derivation modules of hyperplane arrangements, Arrangements of Hypersurfaces, at Northeastern University, Boston, USA, 2018年4月21日.
9. T. Abe, Poincare polynomials and free arrangements, A walk between hyperplane arrangements, computer algebra and algorithms, at Hokkaido University, 2018年2月2日.
10. 阿部拓郎, 自由配置に関する近年の進展とその応用, 不変式・超平面配置と平坦構造, at 北海道大学, 2017年11月10日.
11. T. Abe, The  $b_2$ -inequality and freeness of the restrictions of hyperplane arrangements, Advances in Hyperplane Arrangements, at University of Bremen, Bremen, Germany, 2017年8月16日
12. T. Abe, Algebra and combinatorics of hyperplane arrangements, The 15th Japan-Korea Workshop on Algebra and Combinatorics, at Kumamoto University, 2017年2月10日.
13. 阿部拓郎, Divisionally free arrangements of hyperplanes, 第61回代数学シンポジウム at 佐賀大学, 2016年9月9日.
14. T. Abe, Recent topics on free arrangements of hyperplanes, Summer Conference on Hyperplane Arrangements(SCHA) in Sapporo, at Hokkaido University, 2016年8月11日.
15. T. Abe, Divisionally free arrangements of hyperplanes, MS seminar, at IPMU, 2016年6月16日.
16. T. Abe, Divisional flags and freeness of hyperplane arrangements, The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications, Mini symposium:Combinatorics of hyperplane arrangements, at Kyoto University, 2016年5月24日.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<https://sites.google.com/site/takuroabemath/home>

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：白井 朋之

ローマ字氏名：Shirai, Tomoyuki

所属研究機関名：九州大学

部局名：マス・フォア・インダストリ研究所

職名：教授

研究者番号(8桁)：70302932

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名：矢野 孝次

ローマ字氏名：Yano, Kouji

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。