

令和 元年 5 月 31 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13745

研究課題名(和文) 構成的ガロア理論と数論的基本群における計算代数手法の揺籃

研究課題名(英文) Cultivation of computational approaches in constructive Galois theory and arithmetic fundamental groups

研究代表者

中村 博昭 (Nakamura, Hiroaki)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：60217883

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：楕円曲線やヤコビ多様体の有限位数点に関する様々な数論幾何的对象について計算代数アルゴリズムによる計算機実験を行った。とくに多項式変数のペル方程式に関する周期的な連分数展開、ボンスレ多角形の代数的変形、楕円曲線の有理点に関する不定方程式などについて様々な角度から実例計算を行った。平面三角形のチェビアン交差対の考えを用いて、複素2変数の幾何学的な作用素族を導入し、基本性質を考察するとともに面積保存変換に対してヴィジュアルな出力を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

この研究では構成的ガロア理論や数論的基本群(遠アーベル幾何)をめぐる様々な数論現象の研究のうち、計算代数的な手法で発見的に対象を構成できる題材の開拓を目指す。代数多様体の基本群を形作る対称性や代数的被覆写像の系列に関連して見えてくる構造のうち、計算代数的な観点から表現できるものを実験的に検証し、具体的なヴィジュアル出力を含め実例計算を示すことにより、周辺分野の専門家や若手研究者を含む幅広い研究者層の理解と興味を促進する。

研究成果の概要(英文)：We made computational approaches to various arithmetic-geometric objects related to finite ordered points on elliptic curves and/or Jacobian varieties, including periodic continued fractional expansions about specific polynomial Pell equations, algebraic deformation of Poncelet polygons, Diophantine equations related to arithmetic of elliptic curves. Using intersections of cevians of plane triangles, we obtained basic properties of certain triangle operations with two complex variables together with visual outputs of iteration of area preserving operators.

研究分野：整数論

キーワード：実験数学

1. 研究開始当初の背景

数論的基本群は、多様体の代数的被覆全体が集团的に表現する対称性を総括するものであり、その性質の解明には、個々の興味深い特徴をもつ被覆の発見が一つの出発点になる。また、基本群の群環のなかに数論的意義をもつように定義された特性元(伊原アソシエーター級数など)を非可換組合せ群論的にテイラー展開した場合の、テイラー係数の振る舞いを高い次数まで詳細に知ることは、数論的な応用を見出すための契機を与える。一方で、昨今の計算代数理論の発展は著しく、従来の手計算ではとても困難であった高い次数における被覆やテイラー係数の振る舞いのなかに、計算機実験により発見的アプローチが可能になってきている。数論的な(分岐)被覆理論については、Fried, Voelklein, Debes, Cadoret 等によるモノドロミー置換によるガロア降下理論、また多重(楕円)ポリログや結び目不変量へのアプローチについては、Alekseev, Enriquez, 古庄英和, 森下昌紀等による精緻な理論展開が進んでいる今日であり、計算代数的な手法をアルゴリズムの側面とこれらの最新理論における位置づけを明確にしながら育成することが望まれる。

2. 研究の目的

この研究では構成的ガロア理論や数論的基本群(遠アーベル幾何)をめぐる様々な数論現象の研究のうち、計算代数的な手法で発見的に対象を構成できる題材の開拓を目指す。グロタンディーク・デッサンを実現する Belyi 関数の算出や、自由群や曲面群の重みフィルター付けに付随して発生するさまざまな表現のヤング図形による分解、アソシエーターと呼ばれる非可換ベキ級数の係数に現れるガロア指標の分布や関係式などに焦点を当てる。数論幾何学における抽象度の高い分野の中にも、計算代数から具体的にヴィジュアルな出力が得られる実例を示すことにより、周辺分野の専門家や若手研究者からの近寄り難さを軽減し、従来より幅広い研究者層の理解と興味を促進する。

3. 研究の方法

計算代数的研究のための環境整備とともに、有理数体上の単結節型の平面木で表されるグロタンディークデッサンの Belyi 関数を、Pakovich 図式に基づいて算出する作業を進める。結節点における分岐が 3 または 4 の場合の従前の結果を拡張して、結節点における分岐数を増やすと、Pakovich 図式は、種数が 2 以上の代数曲線とヤコビ多様体上の位数有限の点を与える有理点の組から生じるものを扱うことになる。また、Brumer, Mestre, Griffiths の方法を精密に組み合わせ、橋本喜一郎、酒井由貴子、角皆宏等は、平面上のボンスレ多角形と付随する楕円曲線の有限部分群による同種写像から、ヤコビ多様体が所定の実乗法をもつような代数曲線の族を構成する方法を編み出して、構成的ガロア理論やネーター問題への応用を与えているが、その手法を、分岐被覆の base change におけるモノドロミー置換表現のシフト図式として Pakovich 図式と並行した発想でとらえることにより、種数が高い代数曲線のモジュライ空間における制御可能な部分多様体のあり方を探る。小木曾啓示氏との共同研究(2003)で構成した三角形の相似類の初等的モジュライ円盤のなかに様々な条件で描かれる軌跡について、その形状や双曲幾何学的な不変量(弧長や内部領域面積など)、代数的変形のあり様について知見を広げる。以上の諸テーマについて考察を進める中で計算代数的に射程にとらえられたものがあれば、ヴィジュアル出力を追及する。

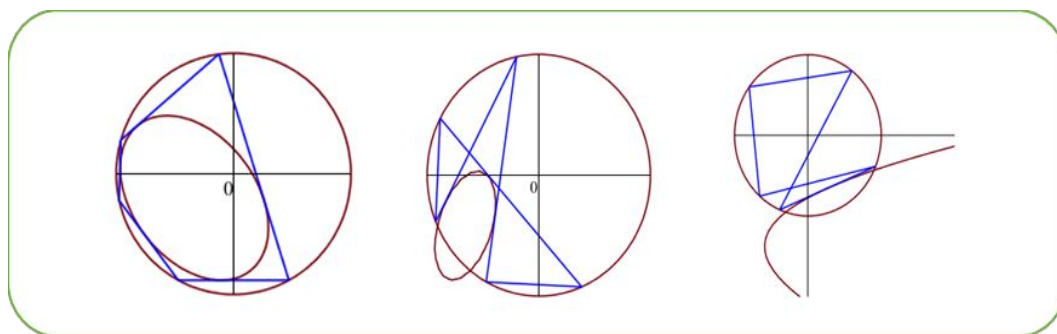
4. 研究成果

(1) 有理数体上の単結節型の平面木で表されるグロタンディークデッサンの Belyi 関数を、Pakovich 図式に基づいて算出する問題について結節点における分岐が 3 または 4 の場合について発表した原著論文 H.Nakamura "On mono-nodal trees and genus one dessins of Pakovich-Zapponi type" (Tokyo Journal of Mathematics, Vol.39 No.3, 2017 年 3 月刊行号所収)の結果を拡張する方向の一つとして、結節点における分岐数を増やす場合を考察した。とくに、種数が 2 以上の代数曲線とヤコビ多様体上の位数有限の点を与える有理点の組から生じるものを扱うことに着手した。連分数展開のアルゴリズムを実装して、種数 2 の曲線からこのようなものを算出する手順を整理して、とくに van der Poorten が与えた例や、Flynn が与えた 1 パラメータ族などについて、連分数展開のアルゴリズムを適用して、部分商の周期列や付随するペル方程式の解の次数などを算出した。

(2) 楕円曲線の有限位数点から生じるボンスレ多角形に関連する周辺の課題について考察をすすめた。とくに三角形のモジュライ円盤の幾何学的性質を反映するパラメーターと密接な関係があるノイベルグ円上の点の偏角との対応関係について具体的な関数を特定し、その半径方

向の漸近展開の係数をチェビシェフ多項式と関係させるアプローチを行った。べき指数 2 の虚 2 次体とオイラーの idoneal 数のリストをもとに、2 次形式論の古典的命題について計算機を用いた検証を行った。研究室の大学院生と協力して、ヤコビ多項式を用いて与えられるダブル・フラワー型のグロタンディーク・デッサンの挙動、複比型ネーター問題に由来する 6 次 2 面体群の生成多項式に関連するモジュライ空間の形状、および楕円曲線の有理点を利用したディオファントス方程式の自然数解の探索について考察をすすめ、補助的な計算機実験を行った。その一部と関連する成果としてプレプリント Gaku Iokibe 著 “Remark on a Paper by Izadi and Baghalaghdam about Cubes and Fifth Powers Sums” (arXiv:1812.07061 [math.NT]) がある。

(3) 橋本喜一郎・酒井祐貴子により導入されたポンスレ 5 角形のパラメータ族について標準的な変数変換により円盤モデルを構築した場合に内接図形がパラメータに応じて変化する様子の描像や、Fried によるガロアの逆問題に現れる数論的な例外被覆の幾つかについて実例検証するなどの計算代数的な手法による実験を進めた。



また平面三角形から 2 組のチェビアン三つ組を指定して交差三角形を形作るための実パラメータを複素化するアイデアを進め、2 変数の複素パラメータをもつ作用素族を導入して、さまざまな知見を得た。その一部は小川裕之氏との共同研究として、共著のプレプリント “A family of geometric operators on triangles with two complex variables” として発表した (arXiv:1811.07703)。この中で、パラメータのフーリエ変換により、問題の作用素族全体にモノイド構造を自然に導入することが可能になること、とりわけ面積保存型の作用素族の全体(保測変換)がトーラス面をなすことが示された。さらに、このトーラス面の上での測地線軌道による三角形の変形をあらゆる興味深い描像について計算機実験を行い、今後の研究方向に役立つと思われる萌芽的な知見が得られた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 1 件)

Hiroaki Nakamura, On mono-nodal trees and genus one dessins of Pakovich-Zapponi type, Tokyo J. Math. 39 (2017), 783--795. 査読有
DOI: 10.3836/tjm/1475723085

〔学会発表〕(計 3 件)

Hiroaki Nakamura “Chebyshev type polynomials with XY-skeletons”, The 1st Joint Workshop of Nanyang Technological University and Osaka University on Fundamental Science, [Parallel Session 1 Mathematics], Osaka University, September 28, 2017.

中村博昭 「グロタンディーク・デッサンと周期的連分数」, 九州大学 数理談話会, December 15, 2016.

中村博昭 「連分数と楕円曲線をわたる野鳥の森」, 研究集会: Tokyo Journal of Mathematics 篠田記念号刊行に寄せて, 上智大学, March 20-22, 2016.

6 . 研究組織

(1)研究分担者 なし

(2)研究協力者

研究協力者氏名：小川 裕之

ローマ字氏名：OGAWA, Hiroyuki

所属研究機関名：大阪大学

部局名：大学院理学研究科

職名：助教

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。