

令和 2 年 6 月 3 日現在

機関番号：14501

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2019

課題番号：16K13747

研究課題名(和文) 概均質ベクトル空間に伴う指数和の研究

研究課題名(英文) Study of exponential sums associated with prehomogeneous vector spaces

研究代表者

谷口 隆 (Taniguchi, Takashi)

神戸大学・理学研究科・准教授

研究者番号：60422391

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：概均質ベクトル空間に伴う指数和を研究した。いくつかの概均質ベクトル空間について、この指数和を具体的に計算した。

指数和の整数論的な応用についても研究した。篩法と呼ばれる技法を展開することで、次の2つの成果を得た。(1) 判別式が高々8個の素因子しかもたないような4次体が、「かなり多く」存在することを証明した。(2) 3次体を数える関数の誤差項の評価を改良した。また、分解条件を指定した族を数える場合に、誤差項の一樣評価を先行研究のものから大幅に改善した。指数和を計算する方法を改良し、また篩法の更なる改良について、成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

指数和は整数論における基本的で重要な研究対象の一つだが、概均質ベクトル空間に伴う指数和は、かなり値が小さくなるという著しい特徴が観察されている。本研究では、具体的に指数和を計算することで、このことをさまざまな場合に実際に確かめることができた。またこの特徴(小ささ)を直接活用する整数論的な応用を与えた。この成果はさまざまな応用を持つことが期待される。指数和を計算する手法を改良できたことも、意義ある成果だと考えられる。

研究成果の概要(英文)：We studied exponential sums associated with prehomogeneous vector spaces. We obtained explicit formulas for several prehomogeneous vector spaces.

We also studied applications to number theory. By developing sieve methods, we obtained two major results: (1) We showed there exist "many" quartic fields whose discriminants have at most eight prime factors. (2) We improved the error term estimate in the counting function for cubic fields. We largely improved the uniform estimate with respect to the splitting conditions of the cubic fields. We further developed a method for evaluating exponential sums, and obtained a further improvement to sieve methods in question.

研究分野：整数論

キーワード：指数和 篩法 概均質ベクトル空間 代数群

1. 研究開始当初の背景

- (1) 概均質ベクトル空間の概念は、1960年代に佐藤幹夫により導入され、その後概均質ベクトル空間にはゼータ関数が伴うことが発見されて整数論における重要性が確立した。2005年頃、その整数軌道には極めて著しい整数論的構造があることが Manjul Bhargava により発見され、注目を集めていた。
- (2) 指数和は整数論においては様々な文脈で登場し、基本的で重要な研究対象となる。概均質ベクトル空間についても指数和が定まり、以前からさまざまな研究があった。典型的には、篩法を用いて密度定理を証明するときに、指数和の大きさが問題になる。また、ゼータ関数の関数等式の係数に指数和が現れる。研究代表者は、軌道指数和と呼ばれる指数和の一種を計算する中で、それを効果的に計算する方法を開発し、またその結果の整数論への応用を幾つか得ていた。

2. 研究の目的

- (1) 概均質ベクトル空間に伴う軌道指数和は、計算されている場合の方が少数である。できる限り多くの他の概均質ベクトル空間について、軌道指数和を計算し、明示公式を与える。古典型と呼ばれる無限系列をなす概均質ベクトル空間についても軌道指数和を計算し、他の理論との関係を探る。
- (2) 概均質ベクトル空間に内在する整数論的な構造から、これまでにさまざまな著しい定理が証明されてきた。本研究では、概均質ベクトル空間に伴う軌道指数和の明示公式に基づいた、精緻な整数論的な成果を導く。篩法を改良し、密度定理を導く。またゼータ関数の関数等式について研究する。

3. 研究の方法

- (1) 軌道指数和を計算する基本的な方法の1つは、座標部分空間を用いて有理軌道を階層化することである。この階層化のために、それぞれの表現の具体的な特徴をよく把握する必要がある。部分空間により小さい概均質ベクトル空間が現れるときは、その結果を活用できる。また、指数和は有限和なので計算機とも相性が良い。明示公式を求める際に補助的に用いるほか、計算が容易でない場合に、数値実験を行って公式を予測する。
- (2) 篩法については、開発されている手法は多岐にわたり文献も膨大である。整数論への応用を考える際は、篩法に詳しい Frank Thorne 氏と連絡を密に取りながら研究を進める。近年、Manjul Bhargava によって開発された、代数群の表現に伴う「幾何篩」を活用する。篩法の各種の成果を組み合わせ、必要な部分を改良して、本研究の強みが発揮される固有の成果を導く。

4. 研究成果

- (1) 新たに10種類程度の概均質ベクトル空間について、軌道指数和の明示公式を得た。先行研究と同様、軌道指数和が基本的に「かなり小さくなる」ことが確認できた。さまざまな特徴的な構造が観察されたが、それをはっきり法則として定式化するには至らず、その解明は今後の研究課題である。
古典型と呼ばれる5種類の概均質ベクトル空間の中では、長方形列の空間と交代行列の空間について明示公式を得た。前者については非常に望ましい形で公式が得られた。後者については、必ず約分されて多項式となる有理式が得られている。この整性は興味深いと思われ、今後の研究で明らかにしたい。また、残る3種類の古典型概均質ベクトル空間についても、軌道指数和の計算は意義深い問題だと考えられる。
また、既に計算が終了していた部分について計算手法を改良し、論文を出版した。
計算技法については、石塚裕大氏、伊藤哲史氏との共同研究で、部分空間だけでなく、部分多様体を用いる方法を見いだした。これにより更に多くの場合に計算ができるようになったと考えられる。今後研究を継続する。
- (2) 概均質ベクトル空間における概素数篩法を開発した。具体的な成果として、以下の定理を証明した。

定理1：絶対値が X 未満であり高々3個しか素因子のない判別式をもつ3次体の個数は、少なくとも $X/\log(X)$ のオーダーである。

定理2：絶対値が X 未満であり高々8個しか素因子のない判別式をもつ4次体の個数は、少なくとも $X/\log(X)$ のオーダーである。

定理 1 については、素因子の個数を 3 から 7 に置き換えた定理が以前に知られていた。定理 2 については、このような形の定理は以前には示されていないかったようである。それぞれ、2 元 3 次形式の空間と、3 元 2 次形式の対の空間を用いる。

概均質ベクトル空間において、特異軌道の指示関数のフーリエ変換の各軌道における値は、概ねその軌道の特異度と逆相関する。開発できた篩法は、この特徴的な構造を効果的に用いるものであり、Bhargava によって開発された幾何篩の改良版が適用される。Greaves と Richert によって開発されていた重み篩を適用することで、素因子の個数をかなり小さくすることができた。今回開発した方法は汎用的なもので、他の概均質ベクトル空間に適用できるほか、必ずしも概均質ベクトル空間でない代数群の表現にも適用できると思われる。Frank Thorne 氏との共同研究で、研究成果を出版した。

また、Frank Thorne 氏、Theresa Anderson 氏と共同で、上界篩を近似篩に改良する研究を行い、一定の成果を得ている。

- (3) 3 次体を数える関数について、誤差項の評価を改良した。また、素数における分解条件を指定した族を数える場合に、誤差項の一樣評価を大きく改良した。先行研究と比べると、分解条件の指定の仕方はより一般的になり、また評価の指数もかなり小さくなった。誤差項を平均した場合の指数は、部分分岐については $-1/3$ で、完全分岐については -1 である。先行研究のいずれも $16/9$ を大きく改良したものとなっている。この一樣評価は、他の研究者によってさまざまな応用が見出されており、この度の指数の改良で、さらに幅広い応用が可能になったと思われる。

証明のために、関数等式を持つ Dirichlet 級数の係数の部分和を効果的に評価する Landau の方法の一樣版を与えた。この部分は Frank Thorne 氏、Lowry Duda 氏との共同研究である。その成果は論文にまとめ、現在投稿中である。

これと指数和の公式を組み合わせることで証明する。証明は当初複雑で、またさまざまな技術的条件がついていたが、相応の努力を傾注し、最終にかなり簡明な形にできたと思われる。

4 次体を数える関数などについての一般化が可能である。Frank Thorne 氏と Manjul Bhargava 氏との共同研究である。

副産物として、2 次体を数える関数について、やはり素数における分解条件を指定した族を数える場合に、誤差項の一樣評価を大きく改良した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Taniguchi Takashi, Thorne Frank	4. 巻 142
2. 論文標題 Orbital exponential sums for prehomogeneous vector spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 American Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 177 ~ 213
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.1353/ajm.2020.0004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Taniguchi Takashi, Thorne Frank	4. 巻 376
2. 論文標題 Levels of distribution for sieve problems in prehomogeneous vector spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 1537 ~ 1559
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.1007/s00208-019-01933-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 M. Bhargava; A. Shankar; T. Taniguchi; F. Thorne; J. Tsimerman; Y. Zhao	4. 巻 -
2. 論文標題 Bounds on 2-torsion in class groups of number fields and integral points on elliptic curves	5. 発行年 2028年
3. 雑誌名 Journal of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 11件/うち国際学会 8件）

1. 発表者名 Takashi Taniguchi
2. 発表標題 Bounds on 2-torsion in class groups of number fields
3. 学会等名 RIMS Workshop 2018 "Analytic Number Theory and Related Topics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 谷口隆
2. 発表標題 代数体のイデアル類群の2-partについて
3. 学会等名 第17回北陸数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takashi Taniguchi
2. 発表標題 An introduction to Shintani's zeta function for the space of binary cubic forms
3. 学会等名 The 10th Westlake Number Theory Colloquium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 谷口隆
2. 発表標題 Variants of Ohno-Nakagawa's dual identity
3. 学会等名 神戸整数論集会2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷口隆
2. 発表標題 On the numbers of cubic and quartic fields with almost prime discriminants
3. 学会等名 第4回京都保形形式研究集会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷口隆
2. 発表標題 Uniformity in Landau's method and applications
3. 学会等名 Arithmetic Geometry and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷口隆
2. 発表標題 Uniformity in Landau's method and applications
3. 学会等名 上越整数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takashi Taniguchi
2. 発表標題 Exponential sums associated to prehomogeneous vector spaces
3. 学会等名 2016 Seoul-Tokyo conference on Number Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takashi Taniguchi
2. 発表標題 Orbital exponential sums for prehomogeneous vector spaces
3. 学会等名 Whittaker Functions: Number Theory, Geometry and Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 谷口隆
2. 発表標題 概均質ベクトル空間の軌道指数和
3. 学会等名 代数的整数論とその周辺2016 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takashi Taniguchi
2. 発表標題 On the numbers of cubic and quartic fields with almost prime discriminants
3. 学会等名 The 10th Young Mathematicians Conference on Zeta Functions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Takashi Taniguchi http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/tani/</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	石塚 裕大 (Ishitsuka Yasuhiro) (50761136)	京都大学・理学研究科・特定助教 (14301)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	伊藤 哲史 (Ito Tetsushi) (10456840)	京都大学・理学研究科・准教授 (14301)	