

令和元年6月1日現在

機関番号：16301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13750

研究課題名(和文)有限対称空間および関連するグラフスペクトル論の視点による整数論の研究

研究課題名(英文) Research on number theory in view of finite symmetric spaces and the associated graph spectrum

研究代表者

平野 幹 (HIRANO, Miki)

愛媛大学・理工学研究科(理学系)・教授

研究者番号：80314946

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究において、ケイリーグラフのスペクトル分布問題の整数論的考察を発展させた。とくに、ある非可換有限群上のケイリーグラフの族に対するラマヌジャン性についてのバレンシー判定境界問題について、巡回群の場合と類似の結果を示し、解析数論における未解決重要問題であるハーディ・リトルウッド予想とグラフスペクトル理論との関係を示唆する根拠を増やした。その他にも、整数論の対象がグラフスペクトル論に自然に現れることなどをいくつかの現象において確認した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

解析的整数論の問題はその研究の歴史にも関わらず、解決の糸口が見えていないものが散見される。本研究の成果は、古典的な解析的整数論における有名未解決問題であるハーディ・リトルウッド予想とグラフスペクトル理論との関連性についての新しい指摘を与えるものであり、新しい研究方針を与えるものと考えられる。また、成果として発表するには至らなかったが、有限群上の調和解析や関連する組合せ論と整数論との重要な関連についての新たな知見は今後の研究に活用されるものである。

研究成果の概要(英文)：We have developed a study of spectral distribution problems of Cayley graphs in view of Number Theory. In particular, we give a result on boundary problem of Ramanujancy for some families of Cayley graphs on non-commutative finite groups, which is similar to the case of a family of circulant graphs. Our results suggest an interesting (unknown) relation between theory of graph spectrum and analytic number theory.

研究分野：整数論

キーワード：代数学 整数論 グラフスペクトル論 有限対称空間 有限特殊関数

1. 研究開始当初の背景

局所対称空間上に作用するラプラシアンの特値が保型形式やセルバーグゼータ関数を通じて整数論的結果を与えるように、代数的に定義されたグラフに対して作用するラプラシアン(の類似物である隣接行列)の特値がグラフに内在される整数論的性質を反映することが期待される。実際、有限正則グラフの第一特値(隣接行列の非自明最大固有値)はグラフの「連結度」を評価すると同時に、そこで定義される伊原ゼータ関数に対するリーマン予想の成否を決定し素サイクル分布の漸近評価を左右する。ここに、リーマン予想が成立するグラフはラマヌジャングラフと呼ばれている。

有限群 G とその対称生成系 S から構成されるケイリーグラフ X の特値は、群 G の表現論を用いて記述される。ここに X の頂点数は G の位数、 X のバレンシー(各頂点に繋がる辺の本数)は S の濃度である。一般に X に対するラマヌジャン性を判定することは容易でないが、完全グラフ(どの頂点同士も辺で繋がっているグラフ)に近い場合にはバレンシーのみで判定することができる。我々は G が素数位数 p の巡回群の時その判定境界が「例外的」であることと p が特定の二次式で表現されることとの同値性を示したが、これはグラフ特値論と整数論(ここでは素数の多項式による表現についてのハーディ・リトルウッド予想(未解決))との関係の存在を示唆するものであった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、代数的に定義された有限正則グラフに対する特値論を明示的に扱い、整数論の観点で考察することである。特に、以下の3点に研究の焦点を絞る。

- (1) バレンシーによるラマヌジャン性判定境界問題を、 G がフロベニウス群や一般線形群など非可換である場合に研究する。
- (2) 計算機実験により巡回グラフに対する特値の分布を詳細に研究する。
- (3) 有限体上の簡約可能群および関連する対称空間に付随する有限正則グラフ上の調和解析を、保型形式の有限類似理論、とくに球関数など有限特殊関数の観点から明示的に研究する。

グラフ特値に内在する整数論的性質の研究はまだ開拓期にある中、(1, 2)では解析的整数論の未解決問題に対する新しいアプローチを切り拓き、(3)では整数論と代数的組合せ論や群表現論などとの研究交流を促進させ、双方の知見をさらに深化させる。

3. 研究の方法

整数論の問題に対するグラフ特値論的アプローチを開拓するため、これまでに得ている我々の研究成果を進展させ、非可換群から定まるケイリーグラフを明示的に考察すると同時に、巡回的ケイリーグラフの特値分布についての考察を計算機実験と併せて実施する。さらに、有限群および関連する有限対称空間上の明示的調和解析についても保型形式論や特殊関数論における申請者の知見を活用しながら考察する。本研究の実施においては、群論・代数的組合せ論・解析的整数論・保型形式論・応用代数学など様々な分野の研究者との意見交換、関連する専門書籍による情報収集、計算機実験とその結果に基づいた議論、などが要となる。

4. 研究成果

研究体制の確立ののち、巡回群に対するラマヌジャン性判定境界問題の非可換群への拡張を試みた。有限群 G から定まるケイリーグラフの特値は G の表現(の指標)を用いて記述されるが、一般に対称生成系 S が正規でない場合には特値を明示的に評価するのは容易でないことが知られている。 G が可換である場合には S の正規性は問題にならないが、 G が非可換である場合には S の正規性に対する仮定の有無が問題の定式化に影響を与えることになる。このような予備的考察のもと、 G がフロベニウス群である場合にこの影響を明示的に指摘し、特に二面体群において比較定理を与えた。その結果、正規性を仮定しない場合(すなわち特値の明示評価が容易でない場合)に巡回群と同様なハーディ・リトルウッド予想との同値性が得られたので、その成果を論文としてまとめ発表した。また、 G が一般四元数群の場合にも類似の結果を研究分担者によって得られたので、これも論文としてまとめた。

そのほかの成果は、以下のとおりである。

- (1) ケイリーグラフの族として G が巡回群・二面体群である場合のケイリーグラフのうち、特値のすべてが整数であるようなものからなるグラフ族におけるラマヌジャン性判定境界について考察し、結果を得た。
- (2) 非ラマヌジャン性判定境界について限定的な計算機実験を行い、既存の評価を確認した。
- (3) 有限ハイゼンベルク群に関連した有限ゲルファント対と関連した球関数についての明示公式について研究を行い、ガウス和との関連性についての知見を得た。

とくに(1)では近年サンダーらによる整数的巡回グラフの研究論文の中で未解決とされた問題に対する証明を与えた。今後、上記に述べた新しい知見に基づいた継続研究を進め、新たな成果につなげたいと考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 2件)

1. Ramanujan Cayley graphs of the generalized quaternion groups and the Hardy-Littlewood conjecture, Yoshinori Yamasaki, Mathematical modelling for next-generation cryptography, volume 29 of Math. Ind. (Tokyo), 159-175, 2018, Springer, 査読有
2. Ramanujan Cayley graphs of Frobenius groups, Miki Hirano, Kohei Katata, Yoshinori Yamasaki, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 94(3), 373-383, 2016, 査読有

〔学会発表〕(計 2件)

1. Remarks on Ramanujan circulants and dihedrants, 平野 幹, 香川セミナー, 2018年
2. Ramanujan Cayley graphs and the conjecture of Hardy-Littlewood and Bateman-Horn, 平野 幹, 概均質セミナー, 2017年

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：山崎 義徳

ローマ字氏名：Yamasaki Yoshinori

所属研究機関名：愛媛大学

部局名：理工学研究科（理学系）

職名：准教授

研究者番号（8桁）：00533035

研究分担者氏名：原本 博史

ローマ字氏名：Haramoto Hiroshi

所属研究機関名：愛媛大学

部局名：教育学部

職名：准教授

研究者番号（8桁）：40511324

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。