

令和 2 年 6 月 12 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2019

課題番号：16K13752

研究課題名（和文）双対性が示唆する幾何学の研究

研究課題名（英文）Study of the geometry suggested by dualities

研究代表者

加藤 晃史 (Kato, Akishi)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：10211848

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,700,000円

研究成果の概要（和文）：籠(quiver)とその変異(mutation)は、近年注目を集めている。私は寺嶋郁二氏(現東北大学)との共同研究で、籠変異の列に対し、次のような著しい性質を持つ分配級数を定義した。籠変異の列の反転操作や巡回シフトのもとで不変であり、圏論的なモノドロミーの不変量を与える。変異列の変形に対しペンタゴン関係式を満たす。ADE型ディンキン図形から自然に定義される分配級数は、共形場理論の指標公式に一致し、適当な $q$ ベキ補正のもとで保型形式となる。reddening sequence 籠変異列に対しては量子ダイログの積で表され、combinatorial Donaldson-Thomas 不変量を再現する。

研究成果の学術的意義や社会的意義

籠(quiver)とその変異(mutation)は、クラスター代数とともに、可積分系・低次元トポロジー・表現論・代数幾何学・WKB 解析などさまざまな分野に共通して現れる構造として注目を集めている。特に、籠の変異列(mutation sequence) とゲージ理論や3次元双曲多様体の関連が提唱され、その不変量を数学的に厳密に解析する手段の開発が必要となった。分配 $q$ 級数や分配関数は組合せ論的データのみから定義され、籠が表す数学的対象の詳細には依らないので、双対性の背後にある共通の性質を追究する上で役立つと期待される。

研究成果の概要（英文）：Recently quivers and their mutations play pivotal role. In a joint work with Yuji Terashima (Tohoku), we introduced "partition  $q$ -series" for quiver mutation loops. They enjoy following remarkable properties: They are invariant under inversion and cyclic shift; so may be regarded as monodromy invariants. They satisfies pentagon identities. For Dynkin quivers, they reproduce so-called fermionic character formulas, and enjoy nice modular properties as expected from the conformal field theory. For reddening sequence, they are expressed as ordered product of quantum-dilogarithms and reproduce combinatorial Donaldson-Thomas invariants of the initial quivers.

研究分野：数理物理学

キーワード：籠 変異 クラスター代数 可積分系 低次元トポロジー 組合せ論的データ 分配級数 双対性

## 1. 研究開始当初の背景

1980年代以降、ゲージ理論、共形場理論、位相的場の理論等、トポロジーは数理論物理と緊密に関わりを持ち爆発的に研究が行われたが、現在は一時ほど交流が盛んではないように見える。分野が成熟した故もあるが、場の量子論が持ち込む設定が、伝統的なトポロジーや幾何の問題意識と乖離しすぎていることも理由の一つとして考えられる。1990年代以降、場の理論の双対性(異なる自由度や対称性を持つ系が量子論として等価となる現象)についての膨大な研究が蓄積され、それを記述する枠組みとして圏論の有効性が強く認識されてきた。Douglas, Bridgeland, Kontsevich, Soibelmanらの研究により、BPS状態全体が三角圏(triangulated category)の構造を持つだけでなく、それらの安定性条件(stability condition)の空間が自然に複素多様体の構造を持つことが明らかにされた。

## 2. 研究の目的

近年、弦理論に現れるBPS状態全体は三角圏の構造を持ち、自然に安定性条件という幾何構造を備えていることが明らかになったが、それが幾何学で果たすべき役割は未知である。本研究の目的は、このような「三角圏+安定性条件」の幾何学を、「位相的単体分割+幾何構造」と同一視することにより、物理の双対性研究のアイデアと低次元トポロジーの強力な道具を組み合わせ、双方のより深い知見を得ることにある。双対性変換を変異の列(mutation sequence)として組合せ論的に実現する場合の最初の不変量として、現在進行中の分配級数(partition series)の研究を位置づけ、そのようなモジュライ空間のモノドロミー表現に附随する幾何学として双対性を理解することを目指す。

## 3. 研究の方法

本研究は、「三角圏+安定性条件」こそが双対性を議論するための適切な舞台であるという立場に立つ。目標は、Bridgelandらが見出した安定性条件に入る複素多様体の構造が、実はより具体的に「単体分割+座標系の貼り合わせ」として記述できることを確立することにある。また、安定性条件が変化して「壁超え現象」が起こるとき、それは単体分割に「Pachner move」を、座標変換として「クラスター変換」で貼り合うことを示す。手を動かすための、具体的なモデルケースとして、Seiberg-Witten理論のBPSスペクトルを念頭に置いている。安定性条件はSeiberg-Witten curve上の周期積分で与えられ連続的に変化するが、安定なBPS状態はu-plane内の実余次元1の曲線に沿って不連続に変化する。この様子をDonaldson-Thomas不変量のクラスター変換をヒントとして、単体分割の言葉に翻訳する予定である。こうした「手で触れる、具体的な幾何学的対象」としてのmodular varietyは、将来にわたって数学・物理双方にとって興味深い対象たりうると申請者は考えている。究極的には、幾何学的対象とmoveの連鎖は、上部構造として載っている三角圏に「モノドロミー」として自己同値で作用し、それが双対性に他ならないということを示したいと考えている。

数学における安定性条件は、代数幾何や表現論において「良いモジュライ空間」を構成するための補助条件として数学で導入されたものだが、弦理論を通じて物理的な安定性(崩壊しない条件)として自然に解釈できることは非常に興味深い。Bridgelandが導入した安定性条件とは、端的に言えば「三角圏に複素座標を入れること」と言える。三角圏と安定性条件の関係は、Riemann面のマーキングと正則1次微分形式、あるいは多様体のLagrangian cycleとprimitive formの関係に類似しており、これにより三角圏の「連続変形」を「周期写像」を通じて議論することが可能となる。

## 4. 研究成果

籠とその変異は、クラスター代数とともに、可積分系・低次元トポロジー・表現論・代数幾何学・WKB解析などさまざまな分野に共通して現れる構造として注目を集めている。特に、籠の変異列とゲージ理論や3次元双曲多様体の関連が提唱され、その不変量を数学的に厳密に解析する手段の開発が必要となった。私は寺嶋郁二氏(東北大学)との共同研究において、与えられた籠変異の列に対し、分配級数 $Z(\cdot)$ と呼ばれる母関数を定義した。これは、以下のような著しい性質を持つ。(1)  $Z(\cdot)$ は籠変異の列の反転操作や巡回シフトのもとで不変であり、圏論的なモノドロミーの不変量と考えられる。(2) 籠変異の列の変形に対し、量子ダイログと同様なペンタゴン関係式を満たす。(3) ADE型ディンキン図形やそのペアから自然に定義される分配級数は、あるcoset型共形場理論に現れる指標公式に一致し、適当な $q$ ベキ補正のもとで保型形式となる。(4) reddening sequenceというクラスの籠変異列に対し、分配級数は量子ダイログの積で表され、combinatorial Donaldson-Thomas不変量と一致する。分配級数の考え方は、周期境界条件でなくても、初期条件のみを指定した有限区間に対しても適用可能である。この場合は終状態に対する自由端条件を表すために、 $c$ -vectorで次数付けされた非可換トラス値関数として考えるのが自然である。加藤は、寺嶋郁二氏と水野勇磨氏(ともに東京工業大学)との共同研究に

において、Boltzmann weight を  $q$ -二項係数とする分配関数を導入し、その性質を調べた。この分配関数は、実は引数の異なる 2 つの分配級数 (組合せ論的 DT 不変量) の比として書けることが証明できる。その結果、分配関数もまた分配級数が持つ様々な良い性質を引き継いでいる。

分配  $q$  級数や分配関数は組合せ論的データのみから定義され、箆が表す数学的対象の詳細には依らないので、双対性の背後にある共通の性質を追究する上で役立つと期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kato Akishi, Mizuno Yuma, Terashima Yuji	4. 巻 108
2. 論文標題 Quiver Mutation Sequences and $q$ -Binomial Identities	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 1-24
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnx108	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 加藤晃史
2. 発表標題 力学の変遷 - 古典・量子・弦 -
3. 学会等名 日本数学会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加藤晃史
2. 発表標題 Quiver mutation loops and partition $q$ -series
3. 学会等名 日本数学会（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 加藤晃史
2. 発表標題 Quiver mutation loops and partition $q$ -series
3. 学会等名 研究会「リーマン面に関連する位相幾何学」（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 加藤晃史
2. 発表標題 Quiver mutation and partition q-series
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>研究会「リーマン面に関連する位相幾何学」  <a href="http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~tado/riemann_surface17.html">http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~tado/riemann_surface17.html</a>          Quiver mutation sequence and q-binomial identities  <a href="https://arxiv.org/abs/1611.05969">https://arxiv.org/abs/1611.05969</a></p>
---

6. 研究組織		
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)
		備考