

令和 2 年 6 月 2 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2019

課題番号：16K13755

研究課題名(和文)一般化された複素構造, 4次元微分トポロジー, 非可換代数幾何, 導来圏の研究

研究課題名(英文) Generalized complex structures, 4 dimensional differential topology, noncommutative algebraic geometry and derived category

研究代表者

後藤 竜司 (Goto, Ryushi)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：30252571

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文): ケーラー幾何学において, スカラー曲率はハミルトニアン同型写像のなす群の作用に関するモーメント写像と一致することが, 既に示されている. 一般化されたケーラー幾何においては, レビ・チビタ接続に相当する概念がなく, スカラー曲率をどのように定義するべきか, 五里霧中の状況であったが, 研究代表者は一般化されたケーラー幾何学において, "スカラー曲率" をモーメント写像の枠組みから新たに導入した. その後, 一般化された正則ベクトル束の曲率をモーメント写像の枠組みにて定式化し, 更に多重安定な一般化された正則束とアインシュタイン・エルミート計量の存在の同値性(小林・ヒッチン対応)を確立した.

研究成果の学術的意義や社会的意義

ベクトル束において平均曲率がモーメント写像として得られることは, Atiyah-Bott による顕著な結果であり, その後, 小林-ヒッチン対応, ヒッグス束と基本群の表現空間との同値性など, 様々な分野に大きな影響を与えた. この研究では一般化されたケーラー幾何学においても小林-ヒッチン対応が成立することを示しており, その意義は大きい. またスカラー曲率をモーメント写像としてとらえるこの研究は, ケーラー幾何学において, 現在急速に発展している Donaldson-Tian-Yau 予想が一般化されたケーラー幾何でも成立することを示唆している.

研究成果の概要(英文): In Kahler geometry, the scalar curvature arises as the moment map for the action of Hamiltonian diffeomorphisms. In generalized Kahler geometry, there was no suitable definition of Levi-civita connection and so the notion of the scalar curvature was not known. However the author reaches the precise definition of "scalar curvature" which is the moment map from the novel framework of the infinite dimensional symplectic manifold on a generalized Kahler manifold. Then he also yields the definition of mean curvature of generalized holomorphic vector bundles as the moment map and establishes the Kobayashi-Hitchin correspondence on generalized holomorphic vector bundles over a compact generalized Kahler manifold of symplectic type. The Kobayashi-Hitchin correspondence shows the equivalence between the poly-stability of a generalized holomorphic vector bundle and the existence of generalized Einstein-Hermitian metric.

研究分野: 微分幾何、複素幾何

キーワード: 一般化された複素構造 一般化されたケーラー構造 ポアソン構造 アインシュタイン・エルミート計量 モーメント写像 スカラー曲率 小林・ヒッチン対応 正則ベクトル束

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

1. 研究開始当初の背景

一般化された複素構造, 一般化されたケーラー構造は Hitchin, Gualtieri により, 次の論文において導入された多様体上の幾何構造である. H.J. Hitchin, Generalized Calabi-Yau structures, Q. J. Math. 54 (2003) 281-308, M. Gualtieri, Generalized complex geometry, Ann. of Math. 174 (2011) no. 1, 75-123. 一般化されたケーラー構造はノンケーラーでありながら, 一般化された意味でホッジ分解が成立し, また数理物理における $N = (2, 2)$ 超対称シグマモデルにおけるターゲット空間に内在する幾何構造であることが示されている. ノンケーラー幾何学における双エルミート構造と同値な構造であることも示されている. 一般化されたケーラー構造はその重要性にもかかわらず, 自明な例以外ほとんど得られていない状況であったが, 申請者の研究により, コンパクトなケーラー多様体上に正則なポアソン構造があれば, 変形理論により, 非自明な一般化されたケーラー構造が得られることが示された.

2. 研究の目的

一般化された幾何構造は最近, 急速に研究が進展している新しい幾何構造である. 一般化された幾何構造には一般化された複素構造, 一般化されたケーラー構造があり, 微分幾何, 複素幾何のみならず, 非可換代数幾何, 導来圏の変形, ポアソン幾何学, そして数理物理など異なる分野との関連が様々な形で示唆されている. 特に, 一般化された複素多様体と非可換代数幾何との間には不思議な関連が存在している. 複素曲面の場合, さらにペンシル構造を持つ複素3次元多様体などの重要な場合に焦点を絞り, 一般化された複素多様体と非可換代数幾何との対応を明らかにし, また実4次元多様体上の一般化された複素構造の存在問題の解決など, 一般化された幾何学の最も挑戦的な部分に焦点を絞って研究を進展させることを目的とした.

3. 研究の方法

複素多様体 X 上において, 一般化された複素構造の変形空間 (infinitesimal deformations) は三つのコホモロジー群の直和

$$H^2(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^1(X, \Theta_X) \oplus H^0(X, \wedge^2 \Theta)$$

で与えられる. ここで, Θ は X 上の正則ベクトル場のなす層であり, $H^1(X, \Theta)$ は通常の複素構造の変形, $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ はジャブ的な変形 (b 場による変形), そして $H^0(X, \wedge^2 \Theta)$ がポアソン構造による変形に対応する. 一方, 複素多様体 X 上の導来圏 $D^b(X)$ の変形はホッホシルド・コホモロジー群 $HH(X)$ で与えられ, アーベリアンカテゴリー $\text{Coh}(X)$ をパラメーターづけている $HH(X)$ の位数 2 の部分 $HH^2(X)$ は丁度, 一般化された複素構造の変形空間 $H^2(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^1(X, \Theta_X) \oplus H^0(X, \wedge^2 \Theta)$ と一致している. このことは, 一般化された複素構造と導来圏との間に関係があることを示唆している. 一般化された複素多様体上でコヒーレント層の複体に対応するものを見つけ出し, 導来圏を構成すれば, 一般化された幾何構造の立場から, 導来圏の変形を捉えることが可能となる. また, 導来圏での安定性条件に対応するものを, 一般化されたケーラー多様体の言葉で表せば, これは正則ベクトル束の Kobayashi-Hitchin 対応の拡張となると予想される. 非可換代数幾何は M. Artin, J. J. Zhang, Schelter, Van den Bergh らにより, 30年以上にわたり, 研究されている代数の研究分野である. Artin-Schelter 代数, およびそれに付随するアーベル圏, 導来圏の研究であり, 抽象的であるが, 2次元の場合, 古典的な代数幾何の言葉で具体的に記述される. 例えば, $\mathbb{C}P^2$ の非可換化は3変数多項式環の変形として得られるスクリヤニン代数 (Sklyanin algebra) から構成される. このスクリヤニン代数は3次曲線 C とその上の豊富な直線束 L と自己同型 σ の三つ組み (C, L, σ) により決定される. 一方, $\mathbb{C}P^2$ の一般化された複素構造はポアソン構造により与えられ, その零点集合は3次曲線 C となることから, 具体的にこの二つの対象に関係があることが見て取れる. 特に, del Pezzo 曲面の場合に厳密にこの二つの対象の関係を調べ, 対応を明らかにする. Artin-Schelter 代数 A から出来るアーベル圏 $\text{QGr}A$ を一般化された複素幾何の立場から具体的に構成することを目標にする. これは, 研究テーマ:ポアソン・モジュールと関連していると思われる.

4. 研究成果

当初の目標であった一般化された複素多様体と非可換代数幾何との関係は様々な試みを実行中であり、現在、明確な研究成果は得られていない。しかし一般化されたケーラー幾何の研究においては進展がみられた。モーメント写像の枠組みから一般化されたケーラー幾何学におけるスカラー曲率の適切な定義に到達したことが出発点となり、一般化された正則ベクトル束の小林・ヒッチン対応を確立するところまで研究は進展した。以下、各年毎に研究成果を記述する。

2016年度

ケーラー多様体上に非零な正則ポアソン構造があると、ポアソン構造のランクの変化に応じて、構造のタイプ数がジャンプする一般化された複素構造が構成され、興味深い研究対象となっている。特に、複素曲面上、ポアソン構造により得られた一般化された複素構造に関しては、ポアソン構造の零点集合が非特異ならば、その変形は常に非障害的であり、変形は零点集合の補集合の第二特異コホモロジーにより与えられるという顕著な結果を証明した。この非障害性定理の非可換代数曲面での対応物をいろいろと調べた。また、複素射影空間、デルベッツ曲面など特別な複素曲面上の一般化された複素構造と非可換代数曲面との対応を具体的に調べた。ケーラー幾何学において、スカラー曲率がモーメント写像として現れることが知られている (Donaldson-Fujiki の定理)。研究代表者は一般化されたケーラー多様体においても、無限次元のシンプレクティック幾何の枠組みが適用され、モーメント写像が構成され、このモーメント写像が一般化されたケーラー多様体のスカラー曲率と見なせることを示した。一般化されたケーラー多様体では、Levi-civita 接続はうまく定義されない。また曲率もテンソルとはならないなどの問題があるのだが、スカラー曲率、およびリッチ曲率はモーメント写像により、自然に定義される点が注目すべき点である。これらの研究成果は論文 *scalar curvature a s moment map in generalized Kähler geometry* にまとめて、発表し、その後出版された。また、海外の研究集会でも講演した。

2017年度

2017年度は次の二点に焦点をあてて研究した。

- (1) ポアソンモジュールの具体的な構成
- (2) 一般化されたケーラー多様体上の曲率の研究。

以下 (2) について詳述する。一般化されたケーラー幾何学においては、レビ・チビタ接続が定義されない。更に曲率の適切な定義すら無いという研究状況であったが、研究代表者は2016年 通常のケーラー幾何との類似を追求しながら、一般化されたケーラー幾何学において、モーメント写像の枠組みを構成することに成功し、一般化されたケーラー多様体のスカラー曲率をモーメント写像として定義した。2017年はこのモーメント写像の枠組みをベクトル束の場合に拡張した。一般化されたケーラー多様体上のベクトル束 E において、一般化された接続 D は通常の接続では、多様体 M の余接束 T^*M のところを 接束 TM と余接束 T^*M の直和に置き換えて定義される。多様体上に d -closed な非退化スピノル ψ がある場合は、この非退化スピノルを使い、一般化された接続に関してモーメント写像の観点から新たに”曲率”に相当する概念を導入することができる。すると、モーメント写像の枠組みが自然に適用され、一般化された接続に対してアインシュタイン・エルミート条件が得られ、そのモジュライ空間はモーメント写像による有限次元のケーラー商として得られる。これらの結果は論文にまとめ、Arxiv 上に発表し、国内外の様々な研究集会にて発表した。

Ryushi Goto, Moduli spaces of Einstein-Hermitian generalized connections over generalized Kahler manifolds of symplectic type, arXiv:1707.03143.

2018年度

2018年度は次の二点に焦点をあてて研究を進めた。

(1) 複素曲面上のポアソン・モジュールの安定性, 不安定性の研究

(2) 一般化されたケーラー多様体上のベクトル束に関する小林・ヒッチン対応の確立。

以下 (1) について詳述する。del Pezzo 曲面においては反標準束の正則なセクションは正則ポアソン構造となり、ポアソン構造の零集合は反標準因子を与える。正則ポアソン多様体上の正則ベクトル束がポアソン構造と適合したモジュール構造を持つとき、ポアソン・モジュールという。ポアソン・モジュールは反標準因子において、対数的な極をもつ平坦接続と同値であり、ベクトル束に D-module の構造を与える。del Pezzo 曲面上の有限個の点集合 Y にサポートを持つイデアル層をテンソル積した直線束からの短完全列による extension により、ランク 2 の正則ベクトル束を構成する方法をセール構成という。サポート集合 Y がポアソン構造の零集合上にあれば、セール構成で得られた正則ベクトル束はポアソン・モジュールとなることを示した。ポアソン・モジュールの slope を定義し、部分ポアソン・モジュールにたいして、slope の間の不等式が常に成立するときに、ポアソン・モジュールは安定という定義を与えた。2次元の複素射影空間上の点集合 Y を直線と反標準因子の交わりとして、ポアソン・モジュールを構成すると、通常の正則ベクトル束としては安定ではないのだが、ポアソン・モジュールとしては安定となることを示した。これは (2) の小林・ヒッチン対応において、通常のベクトル束としては、アインシュタイン・エルミート計量は持たないが、一般化された正則ベクトル束としては、アインシュタイン・エルミート計量をもつ。これらの結果は一般化されたケーラー幾何の新たな展開を与えると思われる。

Ryushi Goto, Kobayashi-Hitchin correspondence of generalized holomorphic vector bundles over generalized Kahler manifolds of symplectic type, arXiv:1903.07425.

2019年度

研究代表者は一般化されたケーラー幾何学において、スカラー曲率をモーメント写像の枠組みから新たに導入した。スカラー曲率一定のケーラー計量の存在, 非存在はケーラー幾何学の中心的な問題であり、様々な研究の蓄積がある。初期の結果として、松島ーリヒネロビッツの自己同型群に関する障害定理がよく知られている。今年度は一般化されたケーラー多様体において、松島ーリヒネロビッツの自己同型群に関する障害定理の拡張を試みた。一般化された複素多様体において、自己同型群に相当する概念がコホモロジカルに構成され、また一般化されたケーラー多様体において、reduced automorphisms が構成される。一般化されたケーラー多様体でシンプレクティック型と呼ばれるものについては、とてもうまく構成が進み、スカラー曲率が定数となる一般化されたケーラー構造を持てば、自己同型群は簡約リー群となることが示された。これは上記 松島ーリヒネロビッツ定理の自然な拡張である。例えば、2次元複素射影空間を一点ブローアップして得られる複素多様体 X の通常の自己同型群は簡約リー群ではないので、 X はスカラー曲率が定数となるケーラー計量をもたないことが知られている。しかし、一般化されたケーラー構造の場合、 X 上には X 上の反標準因子 C の形により、一般化された複素多様体としての自己同型群が変化し、自己同型群が簡約となる場合があり、通常の場合とは異なる興味深い現象が現れている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 R. Goto	4. 巻 18
2. 論文標題 Scalar curvature as moment map in generalized Kahler geometry	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The Journal of Symplectic Geometry	6. 最初と最後の頁 147-190
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ryushi Goto	4. 巻 154
2. 論文標題 Unobstructed deformations of generalized complex structures induced by C -logarithmic symplectic structures and logarithmic Poisson structures.	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Geometry and topology of manifolds, Springer Proc. Math. Stat.	6. 最初と最後の頁 159-183
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ryushi Goto and Kenta Hayano	4. 巻 14
2. 論文標題 C -logarithmic transformations and generalized complex structures.	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Symplectic Geom	6. 最初と最後の頁 341-357
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件（うち招待講演 15件/うち国際学会 14件）

1. 発表者名 Ryushi Goto
2. 発表標題 Scalar curvature as moment map in generalized Kahler geometry
3. 学会等名 Mathematics at the Interface of Science and Technology - HeKKSaGOn Meeting 2019（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ryushi Goto
2. 発表標題 Scalar curvature as moment map in generalized Kahler geometry
3. 学会等名 The first geometry conference for friendship of Japan and Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ryushi Goto
2. 発表標題 Scalar curvature as moment map in generalized Kahler geometry
3. 学会等名 2019年度福岡大学微分幾何研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ryushi Goto
2. 発表標題 Matsushima-Lichnerowicz type theorem of generalized Kähler manifolds
3. 学会等名 The 25th Symposium on Complex Geometry, Kanazawa (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ryushi Goto
2. 発表標題 Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry
3. 学会等名 Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 R. Goto
2. 発表標題 Scalar curvature is moment map in generalized Kahler geometry.
3. 学会等名 Cohomology of Complex Manifolds and Special Structures Levico Terme (Trento), (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 R. Goto
2. 発表標題 Einstein-Hermitian vector bundles over generalized Kahler manifolds
3. 学会等名 The 24th Symposium on Complex Geometry , Kanazawa (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 R. Goto
2. 発表標題 Einstein-Hermitian vector bundles over generalized Kahler manifolds
3. 学会等名 第4回日中幾何学研究集会 (中国科学技術大学) 合肥、(招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 R. Goto
2. 発表標題 Scalar curvature is moment map in generalized Kahler geometry.
3. 学会等名 AMS Sectional Meeting AMS Special Session, Fall Western Sectional Meeting University of California, Riverside, Riverside, CA (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 R. Goto
2. 発表標題 Holomorphic Poisson structures and generalized Kahler geometry”
3. 学会等名 University of California, Riverside, Department of Mathematics, Colloquium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 R. Goto
2. 発表標題 Moduli spaces of Einstein-Hermitian generalized connections over generalized Kahler manifolds of symplectic type
3. 学会等名 The 23rd Symposium on Complex geometry (Kanazawa) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ryushi Goto
2. 発表標題 Stratified flat structure on the moduli space of generalized complex surfaces,
3. 学会等名 HAYAMA Symposium on Complex Analysis in Several Variables XVIII (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Ryushi Goto
2. 発表標題 Scalar curvature as moment map in generalized Kahler geometry,
3. 学会等名 The 22nd Symposium on Complex Geometry in Kanazawa, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Ryushi Goto
2. 発表標題 Scalar curvature as moment map in generalized Kahler geometry
3. 学会等名 Generalized Geometry and Noncommutative Algebra, CMI Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Ryushi Goto
2. 発表標題 Scalar curvature as moment map in generalized Kahler geometry
3. 学会等名 The second China-Japan geometry conference at Fujian Normal University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	大川 新之介 (Okawa Shinnosuke) (60646909)	大阪大学・理学研究科・准教授 (14401)	