

令和 2 年 6 月 5 日現在

機関番号：32665

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2019

課題番号：16K13759

研究課題名(和文)無限次元多様体の量子コホモロジー

研究課題名(英文)Quantum cohomology of infinite dimensional manifolds

研究代表者

乙藤 隆史(Otofuji, Takashi)

日本大学・工学部・准教授

研究者番号：70339266

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：量子コホモロジーに現れる新しい可積分系を求めるために、未だ完全な形で定式化されていない無限次元旗多様体の量子コホモロジー環を出発点として研究を開始した。探索の鍵になると期待した数学的対象は、有限次元多様体の量子コホモロジーですでに知られていた可積分構造(フロベニウス多様体、D加群)、インスタントンモジュライから生じる母関数、戸田格子に関する様々な理論、そして2次元位相場理論の正境界付きの場合への一般化であった。いずれのアプローチにおいても具体的に有効性の認められる新事実の発見に至ることは出来なかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

無限次元旗多様体の量子コホモロジー環を出発点として、新しい可積分系の構造を求めるという目標は研究期間内に達成することは叶わなかった。当初期待した具体的な数学的結果を得ることは出来なかった一方、可積分系に関連する様々な数学理論の理解を深める必要性から、関連分野の研究者との交流を深めるために、全4年間の研究期間のうち3か年において年一回、2日ないし3日にわたる研究集会を開催した。毎回20名前後の参加者を得て、当研究課題の広い枠組みでの意義を一定数の研究者に認知して頂く活動を行うことが出来た。

研究成果の概要(英文)：We started our research project of finding new aspects of integrable systems in quantum cohomology, expecting that the case of infinite-dimensional flag manifolds would be an interesting example. We hoped that the following known theories would be keys to our research: structures of integrable systems known for quantum cohomology of finite-dimensional manifolds (Frobenius manifolds, D-modules), some generating functions coming from instanton moduli spaces, several known theories for Toda lattices, and a two-dimensional topological field theory with positive boundary. With any way with one of the keys above we have not succeeded to get essential new discoveries.

研究分野：微分幾何学

キーワード：可積分系 無限次元多様体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Atiyah による位相的場の理論の公理的定式化では、理論をコボルディズムの圏からベクトル空間の圏への関手と捉える。特に、出口側の境界が空でないコボルディズムのみを考える理論を「正境界付き場の理論」という。超対称シグマ模型の位相的捻りで得られる例は、標的空間が非コンパクトの場合に相当する

有限次元旗多様体の量子コホモロジー環の研究は、1993 年の Givental-Kim による A 型リー環に対応する旗多様体の場合の環表示の計算を嚆矢とする。この時期に量子コホモロジーの可積分性を D-加群の枠組みで捉えることがすでに試みられていた。量子シューベルト計算は、環表示よりも多くの情報を必要とするが、D-加群の枠組みは、量子コホモロジー環の表示を出発点として、その可積分性を用いて量子積の構造定数を得るためのアルゴリズムを与える。

無限次元旗多様体については、研究代表者は連携研究者の一人であるゲスト・マーティンとの共同研究 (Quantum cohomology and the periodic Toda lattice, Comm. Math. Phys. 217 (2001) 475-478) において、A 型アフィンリー環に対応する無限次元旗多様体に対し、量子コホモロジー環の存在を仮定した上で、環表示における関係式イデアルが周期的戸田格子の保存量で生成されることを示した。この計算は有限次元旗多様体内の有理曲線のモジュライに帰着されている。無限次元旗多様体の量子コホモロジーそれ自体を対象とした研究は、他には A. L. Mare-L. Mihalcea の研究以外にまったく無いのが当時の状態であった。

無限次元旗多様体の Gromov-Witten 理論は正境界付き場の理論の一例とみなせるが、他の正境界付き場の理論の例としては、自由ループ空間のホモロジー(ストリングトポロジー)がある。標的空間が有限次元多様体の余接空間の場合に相当する。そして、Ernesto Lupercio の研究グループが正境界付き場の一般論の展開を試みていた。

2. 研究の目的

本研究では、無限次元旗多様体の Gromov-Witten 理論を発展させるという目標を掲げた。これに際し、無限次元多様体の幾何学、および手法として用いる可積分系の新たな構造を追求することを目的とした。詳細は以下の通りである。

- (1) 無限次元旗多様体の量子コホモロジーの位相場の理論としての構造解明
種数 0 の場合では、フロベニウス多様体の無限次元版の理論を究明する。さらに一般種数の場合として正境界付きのコホモロジカルな場の理論の一般論を解明することを目的とした。
- (2) D-加群としての無限次元旗多様体の量子コホモロジー環の構造解明
環表示を出発点として、D-加群の枠組みを用いて代数的に構造定数を研究する。具体的には、いかなる D-加群構造が入りうるかという問題を追求することを目的とした。
- (3) インスタントンモジュライの Z-関数を用いた無限次元旗多様体の量子コホモロジーの研究
インスタントンモジュライでのある生成関数 (Z-関数) が、旗多様体の GW 不変量の生成関数 (J-関数) とみなせるという A. Braverman の結果を踏まえて、無限次元旗多様体の量子コホモロジー環の構造定数を研究することを目的とした。
- (4) 戸田格子と量子コホモロジー環との関連の解明
表現論の観点からアフィンの場合をも含む、複数の戸田格子同士の関連状況を解明し、量子コホモロジー環の構造解明に応用することを目的とした。
- (5) 無限次元旗多様体の Gromov-Witten 不変量の定義
無限次元旗多様体の Gromov-Witten 不変量を定義し、上の(1)-(4)で解明した性質との関連を研究することを目的とした。

3. 研究の方法

無限次元旗多様体の幾つかの(素朴な定義の下での)量子積の計算を試み、量子 D 加群の構造を推定する。次に、これをインスタントンモジュライから得られる知見と比較し、量子積の定義について必要な修正を加え、精密化する。これらと同時並行で、正境界付き場の理論の例としての無限次元旗多様体の望ましい量子コホモロジーの定義を推定し、逆にこの知見を用いて正境界付き場の一般論を発展させる。さらに、表現論の観点における戸田格子との関連で有限次元(部分)旗多様体の量子コホモロジーを考察し、アフィン型についてその考察を応用する。これらの考察の下で、無限次元旗多様体の Gromov-Witten 不変量の定義を目指した。詳細は以下の通りである。

(1) 「無限次元旗多様体の量子コホモロジーの位相場の理論としての構造解明」について：

E.Lupercio らによる準 Frobenius 構造の研究に範に取り、無限次元旗多様体の量子コホモロジーに導入されるべき Frobenius 多様体の構造を研究する。ここでは、「項目 2」と「項目 3」で得られる知見を活用する。そして、正境界付き位相場の別の例であるストリングトポロジーとの比較を行って、正種数まで込めた正境界付き位相場の幾何学的理論を構築することを目指した。

(2) 「D-加群としての無限次元旗多様体の量子コホモロジー環の構造解明」について：

D-加群の枠組内で量子コホモロジーD-加群の性質を多く持つ D-加群のクラスを設定し、そのクラスの一般的性質を代数的に研究する。特に、旗多様体の量子コホモロジー環の場合、環表示の関係式に戸田格子の保存量の表示式が現れるが、これをヒントにして、Calogero 系などの可積分系の D-加群的性質を考察する。次に、無限次元旗多様体の場合に具体的考察を行なう。環表示を導くのに用いた幾つかの量子積の計算結果と、有限次元の場合から推定される量子コホモロジー環の諸性質が両立していないという新奇な現象は当面、旗多様体の(通常の)コホモロジー環全体を考える代わりに、ある有限次元部分環に制限すれば回避できるが、この制限は実質的に有限次元旗多様体の場合に帰着できる場合であり、無限次元性を反映する(量子パラメータの)パラメータ域において望ましい D-加群の構造を導入することを試みる。D-加群に対する一般的な操作が量子コホモロジーD-加群に対して持つ効果を探り、無限次元旗多様体の量子コホモロジーD-加群の構成に必要な理論を整備することを目指した。

(3) 「インスタントンモジュライの Z-関数を用いた無限次元旗多様体の量子コホモロジーの研究」について：

Guest-Otofujii による無限次元旗多様体の量子積の計算は、 K 内のある条件をみたす有理曲線のモジュライと複素射影平面上の枠付きインスタントンのモジュライとの同一視に拠っていた。この、2次元の場の理論と4次元ゲージ理論との関係は Nekrasov 予想、AGT 予想との関連で近年急速に発展している分野である。A. Braverman の研究で扱われている Z-関数(インスタントンモジュライ側のある生成関数であり、Nekrasov 関数の一般化である)の具体例を計算し、無限次元旗多様体の量子コホモロジーの性質を推定するためのデータ収集を目指した。

(4) 「戸田格子と量子コホモロジー環との関連の解明」について：

表現論の観点からアフィン型の場合をも含む、複数の戸田格子同士の関連状況を解明し、量子コホモロジー環の構造解明に応用する。これは full flag manifold(G/B)の場合であるが、一般の部分旗多様体の場合においても、Grassmann 多様体に対応する戸田格子の相当物を複数個融合する方法を追及することを目指した。

(5) 「無限次元旗多様体の Gromov-Witten 不変量の定義」について：

(3)で述べた複素射影平面上の枠付きインスタントンモジュライとループ群内の有理曲線のモジ

ュライとの対応を利用する。インスタントンモジュライについては、Braverman, Finkelberg, Gaiitsgory の研究などを参考にする。ループ群内の有理曲線のモジュライについてはループの正則性について代数的でない場合も扱うことを目指した。

研究代表者、連携研究者による個人研究に重きを置いた研究期間、及び他の専門家との議論を交える短い研究期間を繰り返す方法を試みた。各々の研究者が議論の為互いに相手の所属先へ出張し、また関連分野の専門家の所に出向き、また招聘して議論を行なうことにより知識と理解を深める。各年度一回研究集会を開催することにより、研究テーマの普及を目指した。

4 . 研究成果

「研究の目的」で述べた 5 つの具体的な目標いずれにおいても、具体的な結果を得るに至らなかった。さらに、研究の方向性がいずれ生産的になり得るか否かの見通しも得ることが出来なかった。研究期間の途中より、可積分系および量子化に関する理解を深める必要性を認識し、計画していた年 1 回の研究集会の主題をこれらに関連する分野に設定した。具体的には以下の研究集会を主催した。

2016 年度に、リーマン面上のベクトル束のモジュライの幾何構造に関する知識を他の研究者と共有するために、2017 年 2 月 13 日-14 日に幾何学的量子化を主題とする研究集会 Koriyama Geometry and Physics Days 2017 "Geometric Quantization and related topics" を連携研究者の一人であるゲスト・マーティンと共催した。Bohr-Sommerfeld 量子化、Dirac 構造、偏極と量子化の関係、群作用と量子化の関係、ポワソン多様体と Ginzburg-Weinstein 微分同相、Duflo 同型などに関する講演を国内の研究者に依頼した。海外からの参加者を含む計 24 名の参加があった。

2017 年度に、非可換幾何学に関する知識を他の研究者と共有するために、2018 年 2 月 23 日--24 日に非可換幾何学を主題とする研究集会 Koriyama Geometry and Physics Days 2018 "Noncommutative geometry and related topics" を連携研究者の一人であるゲスト・マーティンと共催した。主要講演者として、メキシコから Ernesto Lupercio 氏(Cinvestav-IPN, Mexico) を招聘し、非可換トーリック多様体の解説を含む非可換幾何学の概説講演を依頼した。また、軌道体に関する概説、同変コホモロジーの解説などの教育的講演、および Weyl 多様体の解説、非可換時空上の場の理論、Kontsevich の formality 等の解説を国内の研究者に依頼した。参加者は計 21 名であった。

2019 年度に、可積分系理論に関する知識を他の研究者と共有するために、2020 年 2 月 8 日---2 月 10 日に Koriyama Geometry and Physics Days 2020 "Integrable systems, projective invariants, and related topics" を連携研究者の一人であるゲスト・マーティンと共催した。KdV 階層の概観から始めて、Haantjes 構造、Virasoro 代数とその高次元化、シュヴァルツ微分と射影構造、Oper、平面曲線の運動としての KdV 方程式の記述、など、本研究に緊密に関連する可積分系理論周辺の話題を扱った。参加者は計 15 名であった。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Koriyama Geometry and Physics Days 2017 "Geometric Quantization and related topics" 2017年2月13日(月) --- 2月14日(火) http://www.ge.ce.nihon-u.ac.jp/~otofuji/KGPD/KGPD_Feb2017_ja.html</p> <p>Koriyama Geometry and Physics Days 2018 "Noncommutative geometry and related topics" 2018年2月23日(金) --- 2月24日(土) http://www.ge.ce.nihon-u.ac.jp/~otofuji/KGPD/KGPD_Feb2018_ja.html</p> <p>Koriyama Geometry and Physics Days 2020 "Integrable systems, projective invariants, and related topics" 2020年2月8日(土) --- 2月10日(月) http://www.ge.ce.nihon-u.ac.jp/~otofuji/KGPD/KGPD_Feb2020_ja.html</p>
--

6 . 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	ゲスト マーティン (Guest Martin) (10295470)	早稲田大学・理工学術院・教授 (32689)	
連携研究者	阿部 拓 (Abe Hiraku) (00736499)	岡山理科大学・理学部 応用数学科・講師 (35302)	