

令和元年6月6日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13764

研究課題名(和文) 厳密クーロン無限粒子系：相転移予想とケプラー問題

研究課題名(英文) Strict Coulomb infinite particle systems: phase transition conjectures and Kepler problem

研究代表者

長田 博文 (OSADA, Hirofumi)

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：20177207

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：原点から一つだけ粒子を取り除いた他は、周期的に格子点上に粒子を配置し(これらを環境粒子と呼ぶ)、別の一つのブラウン運動粒子が環境粒子系から、逆温度 β が2次元クーロンポテンシャルで反発力を受けながら運動するときの、拡散極限を調べた。そして、この状況で $\beta > \beta_c$ について相転移が起こることを証明した。

厳密クーロン系の平衡分布で、今、唯一、構成されているのは、Ginibre点過程である。これは典型的な行列式測度であるが、本研究では、連続空間において、すべての行列式測度の末尾事象は自明であるということを証明した。これは従来、離散空間にのみ知られていた結果の連続空間への拡張である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

d 次元空間で d 次元クーロンポテンシャルによって相互作用する無限個の粒子を厳密クーロン無限粒子系とよぶ。その平衡分布は、次元 $d = 2$ が逆温度 $\beta = 2$ の場合が、現在知られている唯一の例であり、Ginibre点過程と呼ばれる。クーロンポテンシャルの遠方での相互作用の強しさのために、厳密クーロン無限粒子系は、通常のギブス点過程やポアソン点過程とは、非常に異なる様相を持つと予想される。この研究では、その例としてクーロン力で影響されるランダム環境中の粒子の均質化問題に関する有効係数についての相転移現象を証明した。

研究成果の概要(英文)：We replace the particles periodically placed on the two-dimensional lattice points except that only one particle removed from the origin (these are called environment particles), and consider that another Brownian particle is moving in the plane effected from the environment particle system by the Coulomb interaction potential with inverse temperature $\beta = 2$. We investigated the diffusive limit when the particle was moving while receiving repulsive force at the Coulomb potential. And it was proved that phase transition occurred about β_c in this situation.

In the rigid Coulomb's equilibrium distribution, the only one that is now composed is the Ginibre point process. The Ginibre point process is a typical determinant measure. In the present study, we proved that in continuous space, the tail events of all determinant measures are trivial. Our result is an extension to the continuous space which was conventionally known only in the discrete space.

研究分野：確率論

キーワード：無限粒子系 クーロンポテンシャル 相転移現象 均質化 行列式測度 遠距離強相互作用

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

この研究は、クーロンポテンシャルで相互作用する無限粒子系にとりくむ。特に d 次元空間において、 d 次元クーロンポテンシャルで相互作用する場合を厳密クーロン無限粒子系と呼び、それを構成し更に、解析するのが目標である。尚、ここではすべての粒子が同一の電荷をもっているとし、粒子の相互作用は反発力のみ考えている。この場合、クーロンポテンシャルのもつ、遠距離の強い相互作用のため、厳密クーロン無限粒子系の構成は、2 次元空間の逆温度が 2 の場合のみ知られていて Ginibre 点過程とよばれていた。しかし、これ以外の厳密クーロン無限粒子系で、構成されたものはなかった。

なお、Ginibre 点過程を平衡分布とする自然な確率力学は、研究代表者が無限次元干渉ブラウン運動を構成する一般論を構築する際に、例として構成した。この一般論は、Dirichlet 形式論を使用して、無限次元確率微分方程式とくものである。平衡分布の確率幾何的情報をまず調べ、その結果を Dirichlet 形式論を経由して確率力学の性質に反映させる、という手段をとった。従来手法では難しかった、クーロンに代表される特異なポテンシャルが扱えるようになっていた。従来は例え Ruelle クラスという良い点過程 (Gibbs 測度) であっても、干渉ポテンシャルが長距離相関を持つと、無限次元確率微分方程式を解くことができなかったのである。Ginibre に関しては、クーロン独自の現象として、この無限次元確率微分方程式の解が、複数の確率微分方程式を満たすということが証明されていた。

2. 研究の目的

無限粒子系は従来、Ruelle クラスと呼ばれる、干渉ポテンシャルに対してよく研究されてきた。このクラスは、Lennard-Jones 6-12 ポテンシャルや Riesz ポテンシャルなど、長距離相互作用も含むが、この相互作用は、「総和可能」であり、結果として得られる無限粒子系の構造は、拡散的尺度で見た場合、Poisson 点過程、つまり自由粒子の範疇に近いものになる。実際、「grand canonical Gibbs 測度」とは Poisson 点過程の「形」をした点過程である。ところが自然界で重要なクーロンポテンシャルは、Ruelle クラスからは外れており、それを研究するのが目的である。

この研究では、一般の次元 d と逆温度 β に対して、厳密クーロン点過程を構成し、その確率幾何および確率力学的性質を明らかにすることである。クーロンポテンシャルの遠方での相互作用の強烈さのために、厳密クーロン無限粒子系は、通常のギブス点過程やポアソン点過程とは、非常に異なる様相を持つと予想される。厳密クーロン無限粒子系が、確率幾何的および確率力学的剛性を持ち、それらに逆温度 β に関する相転移が生じることを証明することを目的とする。クーロン独自の現象を見つけ出し、探求するのが目標である。

3. 研究の方法

平衡分布である点過程の研究から始める。Dirichlet 形式論は、いわば、幾何的な確率解析であり、その参照測度 (今の場合は平衡分布である点過程) の性質をうまくとらえることが重要になる。これによって一般的に確率力学を構成する。同時に、確率微分方程式による確率力学の表現を駆使し、長距離相互作用の影響をとらえる。

4. 研究成果

Ginibre 点過程は、行列式点過程というクラスの典型例である。行列式点過程すべてに成立する性質として、これが常に末尾事象が自明になることを証明した。とくに Ginibre 点過程は末尾事象が自明になることが判明した。一般に離散行列式点過程では、この結果はすでに知られていたが、連続空間では未解決であった。末尾事象の自明性は、無限次元確率微分方程式を解くうえで、重要な役割を果たすことが分かっており、これは重要な結果である。この結果は、(1)で出版した。

厳密クーロン無限粒子系ではないが、2次元クーロンポテンシャルで相互作用する1次元空間の無限粒子系である、Dyson モデルに対して、確率微分方程式の跳躍 (ギャップ) という現象を見出し証明した。これは干渉ポテンシャルの強い長距離相互作用から生まれた現象であり、本研究の目標の一つを果たした。この結果は(2)で出版した。この結果を証明するために、有限粒子系の確率微分方程式の解の、無限粒子系の確率微分方程式の解への収束についての一般論を構築した。これは、(3)で発表した。

格子点に単位電荷を配置し、そこから発生するクーロン力の影響を受けて運動するブラウン運動粒子の挙動、つまりクーロン力によるランダム環境をもつ確率微分方程式を考え、均質化問題 (ホモジナイゼーション) を研究した。格子点すべてに電荷が配置されれば、拡散的スケールで極限は、常に非退化であり、ブラウン運動の定数倍に収束する。この定数を有効伝導率という。次に、格子点から粒子 (電荷) を一つ取り去ると、有効伝導率は、ポテンシャルに付した逆温度 β に対して、相転移を起こすことを証明した。また、非退化な場合も、極限はブラウン運動ではない。その確率力学が満たす確率微分方程式を特定し解いた。この結果は現在論文作成中である。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計3件)

- (1) Hirofumi Osada, Shota Osada;
Discrete Approximations of Determinantal Point Processes on Continuous Spaces: Tree Representations and Tail Triviality,
Journal of Statistical Physics, January 2018, Volume 170, Issue 2, pp 421–435,
<https://doi.org/10.1007/s10955-017-1928-2>
- (2) Yosuke Kawamoto, Hirofumi Osada;
Dynamical Bulk Scaling Limit of Gaussian Unitary Ensembles and Stochastic Differential Equation Gaps,
Journal of Theoretical Probability, February 2018, Volume 32, Issue 2, pp 907–933,
<https://doi.org/10.1007/s10959-018-0816-2>
- (3) Kawamoto, Yosuke, Osada, Hirofumi;
Finite-particle approximations for interacting Brownian particles with logarithmic potentials.
Journal of the Mathematical Society of Japan 70 (2018), no. 3, 921–952.
https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.jmsj/1529309020
doi: 10.2969/jmsj/75717571

〔学会発表〕(計4件)

- (1) 2018/9/25 岡山大学
長田博文
無限粒子系の確率解析学 -古典的確率解析の新展開とランダム行列の力学的普遍性-
2018年度 日本数学会 秋季総合分科会 (2018/9/24--2018/9/27)
- (2) 2018/9/4 ビーレフェルト大学、ドイツ
長田博文
Dynamical universality for random matrices
9th Internatinal Conference on Stochastic Analysis and its Applications
(2018/9/2--2018/9/7)
- (3) 2018/7/5 国立台湾大学
長田博文
Diffusion in Coulomb environment and a phase transition
The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (2018/7/5--2018/7/9)
- (4) 2017/7/26 モスクワ、ロシア
長田博文
Diffusion associated with the zeros of the planner Gaussian analytic function
Stochastic Processes and their Applications (2017/7/24--2017/7/28)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~osada-labo/osadapersonal_hp/index.html

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。