

令和 2 年 6 月 15 日現在

機関番号：32689

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2019

課題番号：16K13767

研究課題名（和文）双曲性をもつ離散群の正規部分群に関する収束指数スペクトルと余増大度剛性の研究

研究課題名（英文）Researches on the spectrum of critical exponents of normal subgroups and the rigidity of cogrowth for hyperbolic discrete groups

研究代表者

松崎 克彦（Matsuzaki, Katsuhiko）

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：80222298

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,700,000 円

研究成果の概要（和文）：自由群のケーリーグラフへの正規部分群の等長的作用に関する収束指数と、商グラフ上の離散ラプラシアン・スペクトルの底との間には、Grigorchuk の余増大公式という関係がある。クライン群の収束指数と双曲多様体上のラプラシアンに対しても同様の結果は Sullivan により証明されたが、共通する点はその群の収束指数の1/2で相転移が起こることである。本研究では、自由群のケーリーグラフの辺の長さを変動させた場合にも、正規部分群の収束指数に依存して定まる重み付きの離散ラプラシアンに対して、そのスペクトルの底との間に余増大公式の一般化が証明された。収束指数の1/2での相転移も確かめられた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

グラフ上の離散ラプラシアンやグラフの指数増大度の研究は多方面で数多くの研究があるが、グラフの各辺に与える重みの解釈によって、それはネットワーク上のマルコフ連鎖の研究とみることでもできれば、双曲性をもつ距離グラフの研究としてみることもできる。本研究の成果は、その両者の立場の間関係を記述したものと捉えることができる。このような無限グラフの構造をもつネットワークの理論は、情報社会や人間社会の複雑で多様なネットワークの解析に応用をもつことが期待される。

研究成果の概要（英文）：The Grigorchuk cogrowth formula gave a relationship between the exponent of convergence for the isometric action of normal subgroups on the Cayley graph of the free group and the bottom of the spectrum of the discrete Laplacian on the quotient graph. Similar results were proved by Sullivan for Kleinian groups acting on the hyperbolic space and for the Laplacian on the hyperbolic manifold. A common phenomenon is that the phase transition of the exponents occurs at 1/2 of that of the base group. In this study, even when the lengths of edges of the Cayley graph of a free group is varied, a weighted discrete Laplacian depending on the exponent of convergence of a normal subgroup determines the spectrum, and the generalization of the cogrowth formula was proved for this. The phase transition at 1/2 of the exponent was also verified in this case.

研究分野：双曲幾何学

キーワード：幾何学的群論 収束指数 ラプラシアンのスペクトル 自由群 ケーリーグラフ 群不変等角測度 群上のランダムウォーク

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

1. 研究開始当初の背景

研究分野の最近の成果を考慮して、研究課題に関連して以下のような具体的な問題を設定し、現状を分析していた。

(1) 余増大度剛性をもたない双曲離散群の構成：余増大度剛性とは、群の軌道から定義されるポアンカレ級数が収束する冪の下限(収束冪)について、正規部分群の列では元の群の $1/2$ より真に増大するという性質である。クライン群または一般にグロモフ双曲空間の等長変換の離散部分群の場合、ポアンカレ級数が収束冪で発散するもの(発散型群)は余増大度剛性をもつことを証明できるが、収束型(発散型でないこと)の場合には余増大度剛性について知られていることは皆無である。最も古典的な設定であるフックス群の場合でも、余増大度剛性をもたない例は知られていない。フックス群および自由群の非自明正規部分群で、収束指数がもとの群の $1/2$ となるものの例を構成することを試みる。収束指数を商空間のラプラシアンの特値の底で読み替えて、それを幾何学的に評価する方針では、既にある等周定数を用いる方法は原理的に不可能である。その場合はラプラシアンの固有関数を構成してスペクトルの底を直接に評価することが必要である。収束指数を直接評価する場合は、収束指数が $1/2$ 以下となる群の体系的な構成法が必要となるが、それは Patterson (1983) にみられるだけである。軌道に関する反転で生成される群の収束指数をもとの軌道に関する収束指数で評価する問題が重要であると考えられる。自由群の場合は具体例による計算も可能であるので、Mathematica を使った数値実験などにより予想の正否を確かめることができる。

(2) (余)増大度剛性の漸近列の構成および特徴づけ：(余)増大度剛性より強く、正規部分群列の収束冪(スペクトル)が(下)上限に集積しない場合を一樣(余)増大度剛性というが、この性質をもつ群(自明な例では単純群)は代数的な制約が大きい例外的なものと考えられる。増大度剛性に対する漸近列の構成は自由群に対して Shukhov (1999)、双曲群に対して Coulon (2011) の研究があり、Yang はさらなる一般化を考えている。余増大度剛性に対する漸近列の構成は自由群に対して Grigorchuk (1980)、コンパクトなフックス群に対して Bonfert-Matsuzaki-Taylor (2012) がある。松崎とイェーリッシュはこれらの研究を踏まえて、自由群に対して商グラフが平面グラフであることを利用した簡明な方法を発見していた。この議論を精査することにより、より適用範囲の広い構成法をつくることが考えられる。またコンパクトな3次元クライン群に対する構成は、最近のトポロジーの大きな成果である virtually Haken 予想の Agol (2013) による解決を利用する方法が考えられる。

(3) 余増大度剛性をもつ群作用の一般化：増大度剛性をもつ群作用に関する最近の Arzhantseva-Cashen-Tao (2015) の研究は、これまで知られるすべての増大度剛性に関する結果を含み、相対双曲群の範疇を越えた研究に踏み出す包括的な成果である。この論文で扱われる群は CAT(0) 群や写像類群など幅広い。議論の手法を余増大度剛性に対して適用することが目標である。余増大度剛性は現状ではグロモフ双曲空間に作用する離散群までしか考察されていない。しかし、前提となる正規部分群の収束指数に関する不等式は Jaerisch (2015) によれば相当広い一般化を期待できる。真の不等号のためには Patterson-Sullivan 理論を用いてきたが、相対双曲群に対してはこれも適用できる。等角不変測度が有効に働かない設定においてはより原始的なポアンカレ級数の発散に関する結果を用意する必要がある。

(4) 双曲群に対する EPS 関係式の拡張：Elstrodt, Patterson, Sullivan (1987)によるクライン群の収束指数と双曲多様体のラプラシアンの特値の底との関係式(EPS 関係式)は、クライン群の微分幾何的な研究において基本をなすものである。最近 Roblin-Tapie (2015) はその定理に対するポテンシャル論を使わないより簡潔な証明とその一般化を得た。この EPS 関係式をグロモフ双曲空間に作用する離散群に拡張することを目指す。問題点は、等角不変測度の全測度が定める関数に、空間の擬等長不変性からくる不定性が生じ、双曲群のケーリーグラフ上でも離散ラプラシアンの正確な固有関数とはならない点である。スペクトルの概念を擬スペクトルに拡張した理論の構成が必要になる。

2. 研究の目的

有限生成群に対する増大度剛性の研究は大きく進展し、一般化された双曲性をもつ群や、曲面の写像類群に対してもその性質が示されている。この概念は、無限指数正規部分群による剰余類群の指数増大度スペクトルの上限から定まるが、正規部分群の普遍被覆空間への作用の軌道の指数増大度スペクトルの下限からも余増大度剛性の概念が導入できる。この着想をもとに本研究では、双曲性をもつ離散群の余増大度剛性を、擬等角不変測度の Patterson-Sullivan 理論とマルコフ連鎖の群拡張の熱力学形式の理論から解明し、クライン群などの場合に実例として現れる増大度剛性と余増大度剛性の双対性に理論的背景を与え、群の双曲性に新たな解釈を与えることを目的とする。

この目的のために、まず離散化された対象での理論の構築からはじめる。群の双曲性はそのケーリーグラフを距離空間とみて定義されるものであるが、この距離構造に変動を与え、より一般の多様体上での解析のための準備とする。さらには、双曲空間に作用する離散群の軌道を使ってケーリーグラフを双曲空間に等長的に埋め込み、この距離グラフの性質が離散群の構造を反映されるような理論の展開を目指す。

3. 研究の方法

本研究では、研究目的を達成するためのより具体的で扱いやすい対象として、自由群のケーリーグラフについて群作用に関する等質性を保ったまま各辺に与える長さを変動させた距離構造をもつグラフを考えた。このグラフは幾何学的にはグロモフ双曲空間であり、そこに等長的に作用する離散群に関して、古典的な双曲空間におけるクライン群の Patterson-Sullivan 理論の一般化が適用可能である。とくに群の軌道の指数的増大度を表す収束指数を次元とする群不変測度が無限遠境界に存在し、その全測度を空間内部の地点から測る関数が重要な役割をはたす。古典的な双曲空間および自由群のケーリーグラフで辺の長さが均等の場合は、この関数が群不変調和関数となり、群の収束指数と商空間のラプラシアンの特値の底との間の関係式が証明される。自由群の場合には Grigorchuk の余増大公式として知られている。しかし、辺の長さが不均等な場合は、自由群の収束指数を具体的に計算することさえも難しい。これを解決するために、グラフ上のランダムウォークとマルコフ行列から定まる離散ラプラシアンの特値に関する解析を行った。これはリーマン多様体における確率過程とラプラス作用素の特値の問題の離散化であると考えられる。幾何学的群論では、有限生成群のケーリーグラフに対してこの問題を考えることは、群の分類における標準的な理論として頻繁に行われている。

4. 研究成果

(1) 自由群の正規部分群がつくる商グラフが平面グラフになる場合の特性を利用して、自由群に対する増大度剛性の漸近列を構成した。その後、自由群の正規部分群の増大度と余増大度との間に成立するある不等式を証明し、上記の結果は、余増大度剛性の漸近列の存在のみから従うことをみてとった。さらに自由群のケーリーグラフの辺に重みをつけた距離空間への群作用の設定に対しても評価式を拡張することを試み、いくつかの予備的な結果を得た。

(2) 距離空間としての幾何学的な視点から離れて、自由群のケーリーグラフ上にマルコフ連鎖を考える場合には、各辺に与えられる推移確率が均等でない場合にも重み付きラプラシアンが定義されて、そのスペクトル半径を与える公式も既に知られている。問題は、幾何的に距離で与える辺の重みと、解析的に確率で与える辺の重みの間の適切な対応関係を理解することであった。本研究では、自由群のケーリーグラフの辺の長さを変動させた場合にも、正規部分群の収束指数に依存して定まる重み付きの離散ラプラシアンに対して、そのスペクトルの底との間に Grigorchuk の余増大公式の一般化が証明され、とくに、収束指数の $1/2$ での相転移も確かめられた。

(3) 極限集合のエルゴード理論的性質が、正規部分群にどのように遺伝するかの問題について、まず双曲空間に作用するクライン群に対して考察した。以前の研究では、錘極限集合は任意の非自明正規部分群の広義の球接極限集合に含まれることを証明していた。今回の研究では、Myrberg 極限集合は任意の非自明正規部分群の狭義の球接極限集合に含まれることを証明した。Myrberg 極限集合は測地線の単位接ベクトル束上での位相的推移性から定義される極限点の集合である。この結果により、球接極限集合の差異が等角不変測度に関して零集合となるかという Sullivan, Tukia による問題についていくつかの例が与えられるとともに、Myrberg 極限点が定める測地線の無限遠への発散オーダーに関する問題を発掘した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 J. Jaerisch and K. Matsuzaki	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Weighted cogrowth formula for free groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Groups, Geometry, and Dynamics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/GGD/547	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 J. Jaerisch and K. Matsuzaki	4. 巻 145
2. 論文標題 Growth and cogrowth of normal subgroups of a free group	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 4141-4149
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/13568	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 K. Matsuzaki	4. 巻 66
2. 論文標題 Growth and cogrowth tightness of Kleinian and hyperbolic groups	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 21-36
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 K. Matsuzaki, Y. Yabuki and J. Jaerisch	4. 巻 14
2. 論文標題 Normalizer, divergence type, and Patterson measure for discrete groups of the Gromov hyperbolic space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Groups, Geometry, and Dynamics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/GGD/548	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 K. Matsuzaki
2. 発表標題 Half the critical exponent
3. 学会等名 A conference on geometric group theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 Klein 群の Myrberg limit set の Hausdorff 次元について
3. 学会等名 Geometry of Riemann surfaces and related topics (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 Myrberg limit set and horospheric limit set
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会函数論分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 J. Jaerisch
2. 発表標題 Weighted cogrowth formula for free groups
3. 学会等名 日本数学会年会幾何学分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 自由群の重み付き収束指数とラプラシアン
3. 学会等名 岡山-広島 解析・確率論セミナー2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 双曲離散群の収束指数と Patterson-Sullivan 測度
3. 学会等名 早稲田大学理工学部数学応用数理談話会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 K. Matsuzaki
2. 発表標題 The Laplacian and exponential growth rate on the weighted Cayley graph of a free group
3. 学会等名 Growth 4 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 J. Jaerisch
2. 発表標題 Growth and cogrowth of normal subgroups of a free group
3. 学会等名 日本数学会年会幾何学分会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 K. Matsuzaki
2. 発表標題 Half the critical exponents of hyperbolic discrete groups
3. 学会等名 Mini-Wiokshop "Hyperbolic Geometry" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

http://www.f.waseda.jp/matsuzak/

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	イェーリッシュ ヨハネス (Jaerisch Johannes) (90741869)	名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授 (13901)	