様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月 ２５ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ１３７７０

研究課題名（和文）確率非線形分散型方程式研究における調和解析的手法と確率論的手法の融合

研究課題名（英文）Harmonic analysis and probablisticc approaches to stochastic nonlinear dispersive equations

研究代表者
堤　誉志雄（Tsutsumi, Yoshio）

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：１０１８００２７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：　クリスタル・ファイバーを光信号が伝播する現象のモデル方程式である，3階分散項付き非線形シュレディンガー方程式によって，独立同分布無限次元ガウス測度がどのように時間発展していくかを，Tadahiro Oh (University of Edinburgh), Nikolay Tzvetkov (University of Cergy-Pontoise)と共に調べた．具体的は，3階分散項付き非線形シュレディンガー方程式のもとで時間発展したガウス測度は元のガウス測度と互いに絶対連続であること，即ちガウス測度は準不変（quasi-invariant）であることを証明した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
無限次元ハミルトン系において最も重要な不変測度はGibbs測度であろう．しかし，Gibbs測度の台空間は非線形発展方程式を解くには弱い（即ち，広い）関数空間であることが多い．また，滑らかな解（例えば，エネルギー有限となる解）全体の集合は，Gibbs測度に関しては測度ゼロとなることが知られている．そこで，測度の不変性の代わりに準不変性を考えることにより，より広いクラスの解の振る舞いを捉えようとするのは自然である．その方向における研究の一つが，ガウス測度が非線形発展方程式の下で準不変となっているかどうかという問いかけである．本研究課題によって得られた成果は先駆的であると言える．

研究成果の概要（英文）：　In collabolation with Tadahiro Oh (University of Edinburgh) and Nikolay Tzvetkov (University of Cergy-Pontoirse), I studed the transport property of Gaussian measures under the flow of the nonlinear Schrodinger equation with third order dispersion, which models the propagation of signal in a crystal fiber. Specifically, we proved that Gaussian measures are quasi-invariant under the flow of the third order dispersion nonlinear Schrodinger equation. The quasi-invariance means that the Gaussian measure and the transported measure under the flow of evolution equation from it are absolutely continuous.

研究分野：関数方程式論

キーワード：非線形分散型方程式　無限次元ガウス測度　準不変性　フーリエ制限ノルム法

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

確率的摂動項を持つ非線形分散型方程式は，ノイズのあるプラズマやグラスファイバー中をソリトン解が通過したときに，どのような変形を受けるかという物理モデルに対応している．従来このような効果は，粘性項や摩擦項を方程式に付加することによって表現され研究されてきた．しかし 1990 年代に，このような決定論的モデルでは説明できない“ソリトンの拡散”という現象が物理的に発見されたり，“ノイズによる正則化”(regularization by noise)というノイズがあるために，決定論的なモデルより解が良い性質を持ち得る現象が知られるようになり，確率非線形波動･分散型方程式独自の解析手法が望まれるようになった．確率的摂動項を持つ非線形分散型方程式は，物理的には自然な設定であるが，数学的研究には大きな困難をともなう．ＫｄＶ方程式や非線型シュレディンガー方程式は偏微分方程式なので，無限次元の確率微分方程式を扱わねばならない．このような問題において，ホワイトノイズ過程は特異性を持つ項として現れ，その結果として方程式を非常に弱い関数空間で考えなければならない．具体的には，ディラック関数などの測度を含むような弱い（すなわち，広い）関数空間で，ＫｄＶ方程式や非線型シュレディンガー方程式を解く必要がある.空間１次元の Burgers 方程式のような非線形放物型方程式においては，平滑化作用があるためこれを利用することにより，ホワイトノイズ過程の特異性を処理することができる．ところが，分散型方程式の場合，このような平滑化作用は期待できない．また，時空間ホワイトノイズが加わると，完全可積分系に対して有効であった逆散乱法を適用することはできなくなる．１９９０年代に開発されたフーリエ制限法によって，非線形分散型方程式は，かなり弱い関数空間で解けるようになった．しかし，フーリエ制限法は，空間変数に関してはかなり広い関数空間を扱えるが，時間変数に関してはある程度の滑らかさ（たとえば，指数 1/2 の Hölder 連続性）を必要とする．時空間ホワイトノイズはブラウン運動の無限次元版であるため，フーリエ制限法が必要としている時間変数についての滑らかさを持っていないので，直接適用することは困難である．そのため，フーリエ制限法自身の改良が必要であったが，その方向の研究は，申請者と de Bouard 氏，Debussche 氏の共同研究(1999, 2004)によって進められ一定の成果を上げることに成功した．ところが近年，確率論の分野において，Lyons，Hairer や Gubinelli によりブラウン運動などの確率摂動が付加された方程式を系統的に扱う手法が開発され急速に発展した．そこで，フーリエ制限法とこれらの手法を組み合わせたアプローチによる研究が期待されている．

２．研究の目的

確率的摂動を持つ偏微分方程式やガウス測度が非線形発展方程式によってどのように伝播するかを考えるとき，確率的影響は特異性の強い効果として現れる．そのため，非線形偏微分方程式に対しては，弱い関数空間（即ち，広い関数空間）で解を考える必要がある．放物型方程式のような平滑化効果がない非線形分散型方程式においては,これが研究の大きな障害となる．そこでまず，典型的な非線形分散型方程式に対して，解の正則性を調べる際に重要な役割を果たす共鳴周波数と準共鳴周波数が，非線形相互作用にどのような影響を与えるのか解析する．決定論的な非線形分散型方程式に対して初期値問題の適切性を精密に調べることにより，確率的摂動が付いた場合や，ガウス測度の伝播の仕方を明らかにすることを目指す．特に後者の問題は，物理的に自然な不変測度であるギッブス測度がエネルギー空間より弱い関数空間においてのみ存在するため，エネルギー有限となるような滑らかな解全体の集合はギッブス測度に関して零集合となってしまう．そのため，最近は不変測度の代わりに，準不変測度を考える研究が始まっており，後者はそれに関する研究と見なすことも出来る点で重要である

３．研究の方法

Takaoka and Tsutsumi (2004), Nakanishi, Takaoka and Tsutsumi (2010)で開発された手法を用いて，フーリエ制限ノルムを非線形相互作用の影響を考慮して修正する．これにより，特異性の相殺が生じ，より広い関数空間において初期値問題の適切性を示すことが可能となる．しかし，確率論的制約から，先行研究と同じ方法でフーリエ制限ノルムを修正することは出来ない．例えば，解の時間積分を考えると，時間積分区間の解の分布が相関してしまうため，決定論的問題において有効であった特異性を除外する手法がそのままでは適用できない．特異な部分を除外して方程式を変換するときに，解の分布が解析できるように変換する必要がある．そこで，特異性を完全に除去することはあきらめ，部分的に残る特異性を解析することを目指した，そのためには，さらに精密な解析が必要となる．確率論的な予備定理は，Oh and Tzvetkov (2017)の先行研究を用いる．

４．研究成果

3 次分散項を持つ 3 次非線形シュレディンガー方程式（3 階シュレディンガー方程式と呼ぶ）は，非線形シュレディンガー方程式の高階版として流体力学や非線形ファイバー光学に現れる重要な方程式である．2 階非線形シュレディンガー方程式と 4 階非線形シュレディンガー方程式に対しては，これらによってガウス測度が時間発展したとき元のガウス測度と互いに絶対連続となることが先行研究により知られていた．今回，まだ未解明であった 3 次分散項付き非線形シュレディンガー方程式に対して同様の問題を考えた．3 階シュレディンガー方程式はエネルギー汎関数に現れる最高階の微分階数は 3/2 であり，それが定符号汎関数とならない．従っ

て，Gibbs 測度を定式化することは困難であるため，3 階シュレディンガー方程式によってガウス測度がどのよう伝播するかを解析することは，2 階及び 4 階シュレディンガー方程式のばあいより重要である．具体的には，3 階分散項と 2 階分散項の係数に関する非共鳴条件の下で，この方程式系によって伝播するガウス測度は元のガウス測度と互いに絶対連続であることを証明することに成功した．特異な部分を完全に除去せず，解分布が相関しないような変換を施すことにより証明が可能となった．この証明方法は，他の方程式系にも適用可能であることが予想される．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　2　件）

[1] T. Miyaji and Y. Tsutsumi, Local well-posedness of the NLS with third order dispersion in negative Sobolev spaces, Differential and Integral Equations, 31 (2018), 111-132.　査読あり

[2] T. Oh, Y. Tsutsumi and N. Tzvetkov, Quasi-invariant Gaussian measures for the cubic Schrodinger equation with third order dispersion, Comptes Rendus Mathematique, Volume 357, Issue 4 (April 2019), 366-381.

〔学会発表〕（計　3　件）
１．堤 誉志雄，Nonlinear Dispersive Equations and Smoothing Effect，2017 年度日本数学会秋季総合分科会（総合講演）（招待講演），20017 年 9 月．

２．Y. Tsutsumi，Localization estimate of solution for the 2D damped and forced Zakharov-Kuznetsov equation，The JAMI 2018 Second Workshop at Johns Hopkins University，（招待講演）（国際学会），2018 年 3 月．

３．Y. Tsutsumi，Quasi-invariant Gaussian measures for NLS with third order dispersion，国立成功大学数学系コロキウム（台湾），（招待講演）（国際学会），2019 年 2 月．

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：稲　浜譲

ローマ字氏名：INAHAMA，Yuzuru

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。