

令和元年5月28日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13775

研究課題名（和文）ベイズ統計学に基いた量子測定最適化理論の構築

研究課題名（英文）Development of Quantum Measurement Optimization Theory based on Bayesian Statistics

研究代表者

田中 冬彦（Tanaka, Fuyuhiko）

大阪大学・基礎工学研究科・准教授

研究者番号：90456161

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究（挑戦的萌芽）の大きな目的は、ベイズ統計学の立場から、量子物理実験において最良な測定を求める一般的な方法論を提案することである。その足掛かりとして量子統計的決定理論の枠組みを再考し「有限標本で望ましい測定方法を提案し、その正当化を漸近理論（近似）で示す」枠組みに拡張した。具体例として、平易なモデルで従来の測定方法より一様に推定誤差を小さくする測定方法を見つけ、その測定が簡単に実現できることも示した。また、応用上、「現在の」実験で、数値処理に適した方法、正則化なども考える必要がある。本研究では自己整合量子トモグラフィにおけるあるクラスの正則化推定量の一致性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

例えば、非可換な2つのobservable (X, Y) の期待値を実験的にデータから推定することを考える。量子力学の教科書的には、 X, Y の2種類の射影測定を $N/2$ 回ずつ行うことが自然であり、誰も疑わずに使っている。量子推定の既存研究は原理的な推定誤差の下限を達成する方法を与えているが、理想的な条件下の話であり技術的な難易度が高い。しかし、本研究成果を利用すれば4種類の射影測定で $N/4$ 回ずつ測定して、一様に推定誤差を減らせることがわかる。このように、本研究の成果が適用できれば、現在の実験現場で理想的な条件でなくとも、無理せず推定誤差を減らす方法が提案できる。

研究成果の概要（英文）：The ultimate goal of our research is to propose a systematic and universal methodology to obtain the best measurement given a specific quantum estimation problem. As a first step, we reconsider the mathematical framework of quantum statistical decision theory and extend it such that we propose a better class of measurements for finite sample cases and justify it by using the approximation method (asymptotic theory). In toy example, according to our proposed methodology we find the measurement yielding smaller estimation error than traditional one. It can be easily implemented in an actual quantum experiment. As for practical application, we have to consider numerical methods and regularizations in the current level of quantum experiments. We show the (mathematical) consistency of a class of regularized estimators in the context of self-consistent quantum tomography.

研究分野：量子ベイズ統計

キーワード：ベイズ統計 統計的決定理論 量子情報 モンテカルロ法 量子計算機 ゲートセットトモグラフィ

1. 研究開始当初の背景

従来、量子情報理論の分野では「原理的に」どこまで量子系の情報を引き出せるかという点に注目してきた。また、サイエンスの立場に立ち、量子系の未知パラメータを推定するために原理的に最適な測定方法を実験的に実現しようという動きがあり、最近では、Hou et al (2016)で量子ビットでの二段階の適応的推定で、原理的な推定誤差の下限 (Gill and Massar, 2000) を達成したという研究が報告されている。

このようなサイエンスの観点での研究はすすんでいるが、一方で、量子力学的な性質が無視できない系でありながら、従来の統計的手法、もしくは、それすら使わないアドホックな手法も多い。例えば、量子メトロロジーとよばれる分野、あるいは、量子計算機関係の実験などである。つまり、上述のサイエンスの結果は多くの実験研究者にとって、daily use には至っていない。

そもそも、「原理的な下限」を追う立場に立つと、あらゆるものが理想化され古典的な雑音が限りなく0という状況を想定することになる。また、「理論の予言 実験での検証」というスタイルがしみこんでいる物理学の世界では、実験現場で日々の統計分析に利用できる統計的手法の開発という研究がほとんど皆無である。著者の知る限り、実験研究者が量子系とは関係ない汎用的な統計手法を学んで少し工夫するといったレベルである。

2. 研究の目的

1のような状況を踏まえ、実験研究者にとって理解しやすく、かつ、量子力学的な性質を踏まえて推定精度の改善をはかる方法は提案できないだろうか。できれば特定の問題だけでなく、普遍的な方法、系統だった方法を開発したいというのが本研究の出発点である。こうした考え方こそ、本来の統計学であり、そこには「古典雑音をゼロにして原理的な下限を追及してやろう」といった高尚な考えは微塵もない。

サイエンスの立場が良いか、日常的な道具を便利にすることが良いかというのは価値観の違いであり、どちらが優れているということはない。しかし、量子情報では(学際領域だからこそ、多様な価値観を認めるべきにも関わらず)前者の方が重視されてきた。

さて、本研究の大きな目的は、ベイズ統計学の立場から、量子物理実験において最良な測定を求める普遍的な方法論を提案することである。言い換えるなら、上述の異なる価値観を両方ともとりこめる理論体系の構築である。

その足掛かりとして、平易なモデルでの理論解析を行う。平均の推定誤差が最小になる測定を数値的に求める方法や近似解法、簡便的な手法も検討し、実験で使える測定選択の理論を統計学的な立場から明らかにする。また、応用上、「現在の」実験設定で有効であるためには、数値処理に適した方法、正則化なども必要であろう。そのような工夫を施した上で、推定の安定性や理論保証(統計的一致性)も目指す。

3. 研究の方法

アプローチは大きく2方向がある。

1) 既存の量子統計的決定理論の方から考えるトップダウン的なアプローチ

2) 実際の実験現場での応用に即した具体的な状況下での、推定方法の提案を積み上げるボトムアップ的なアプローチ

1)はHolevo (1973) による量子統計的決定理論を大前提とする。既存のほとんどの研究は、原理的な推定誤差の下限を追求するため、数学的に許されるありとあらゆる測定(原理的には無限次元の補助系をつけ、古典雑音を限りなく0にする技術があれば可能とされている。)の中で最良のものを見つける話になっていた。そのため、計算の都合上の対称性なども仮定される。

しかし、本研究では、むしろ、平易なモデルで「現時点で実行可能な」射影測定のクラスを制限し、どのように良い測定を比較すべきか、数値的な結果、理論解析を通して明らかにしていく。また、パラメータの動く範囲が限られている状況なども考える。このような情報はクラメル・ラオ下限のような局所的な推定誤差の下限(e.g., Gill and Massar 2000)を考える上では不要だが、有限標本を考える場合には無視できない。特に、数理統計学における推定量(量子測定)の許容性において重要である。

2)は量子計算機の実証実験で使われている自己整合量子トモグラフィをとりあげる。その中で一つの方向性として、ゲートセットトモグラフィ(GST)があり、この枠組みの中で推定手法や理論保証(統計的一致性など)を検討する。

4. 研究成果

本研究の成果について詳しくは発表論文(雑誌論文[1,2,3])などを参考にしてもらおうこととして、上の「研究の方法」の1) 2)に対応付けて述べる。

1) まず、理論的・数値的にここまでの研究で得られた成果は次のようなものである。第一に、量子統計的決定理論において、決定 POVM を閉凸集合に限定しても、ベイズ・ミニマックス・許容性などが問題なく定義できることを示した。この結果から、原理的な下限でなく、厳密には古典雑音がとりのぞけない場合や、量子相関を利用できない場合に「限定して」、量子統計推測（測定と推定量の構成からなる）を理論的に検討できる道がひらけるようになった。

また、有限標本（サンプルサイズ N が有限）を大前提にしているので、適当な対応付けを用いると一般化線形モデルに類似の数学的な構造を見出すことができる。この視点に立ち、例えば、射影測定を複数種類繰り返すといったモデルで測定の最適化が議論できる。つまり、「有限標本で望ましい測定方法を提案し、その正当化を漸近理論（近似）で示す」という、統計学本来の道筋を示せるようになった。（従来の量子推定は、例えば、ベイズやミニマックス基準で「有限標本で原理的な下限を達成する測定方法（抽象的な数式）を構成したり、下限を N の関数として求める」といったアプローチがほとんどだった。あるいは、測定方法は所与として「望ましい推定方法」しか議論していない。）

具体的で意味のある例として、量子ビット系で 2 パラメータモデル（都合上、円板モデルと呼ぶ）・3 パラメータモデル（Bloch 球全体を動くモデル）について数値的・解析的に詳細に検討した。通常は、局所的な推定誤差の下限やベイズ・ミニマックス規準を考えるが本研究ではパラメータ空間に制約をいれたもとの許容性も詳しく検討した。

代表的な成果は、円板モデルで二乗損失を用いる場合、従来、誰も疑問に思わずに行ってきた射影測定が非許容であることを示したことである。円板モデルは X, Y の二つの observable の期待値をパラメータにもつが、単純に X, Y の 2 種類で（例えば $N/2$ 回ずつ）射影測定を行うよりも、4 種類の射影測定のクラスに広げて X, Y, X', Y' の 4 種類で（ $N/4$ 回ずつ）射影測定を行う方が、パラメータ空間全体で「一様に」推定誤差を小さくできることを示した（漸近優越性）。なお、後者のような情報過剰完全な測定（informationally overcomplete measurements）の優位性は、Zhu (2014) でも数値的に示唆されている。

同じモデルで、パラメータ空間を制約すると 2 種類の直交射影測定の優位性がくずれれることも示された。つまり、パラメータが動く範囲がある程度、わかっている場合に、そのことを加味して、場合によっては斜交する射影測定を用いた方が推定性能が高くなりえる。このような結果は数理統計では古くから知られていたが、量子統計では本研究ではじめて明らかにされた。

2) また、応用に向けて、量子トモグラフィに関する研究成果も得られた。自己整合量子トモグラフィにおけるあるクラスの正則化推定量の一致性を示した。最尤推定や最小二乗推定、および、それらにゲージ不定性を取り除く正則化を施した推定量の一致性である。先行研究や実際の実験では、線形演算で得られる推定量を経由して、制約条件を満たすように修正する方法がとられてきたが、厳密な一致性の証明は特になかった。

以上は萌芽研究らしく小さな芽に過ぎないが量子統計の理論研究における新たな方向性を示唆する結果である。

文献:

R. D. Gill and S. Massar:

“State estimation for large ensembles”, Phys. Rev. A, 61 (2000), 042312.

A. S. Holevo:

“Statistical Decision Theory for Quantum Systems.”

J. Multivariate Anal., 3 (1973), 337--394.

Z. Hou, H. Zhu, G-Y. Xiang, C-F. Li, and G-C. Guo:

“Achieving quantum precision limit in adaptive qubit state tomography”, npj, quantum information, 2 (2016), 16001; doi:10.1038/npjqi.2016.1

H. Zhu:

“Quantum state estimation with informationally overcomplete measurements”.

Phys. Rev. A 90 (2014), 012115; DOI: 10.1103/PhysRevA.90.012115.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 3 件)

[1] 田中 冬彦, 山形 浩一, 量子統計的決定理論の最近の進展, 応用数理, 査読有, vol.28, no.2, 2018.

[2] TANAKA Fuyuhiko,

"Quantum statistical decision theory with a restricted class of measurements", 数理解析研

究所講究録, 査読無, 2018, 2017年1月, 京都大学, pp.45-69.

[3] 田中 冬彦,
"量子統計的決定理論に基いた射影測定を選択", 数理解析研究所講究録, 査読無, 2059, 2017年10月, 京都大学, pp. 39-77.

〔学会発表〕(計9件)

[1] 田中 冬彦,
"量子統計的決定理論の新たなフレームワーク", 2016年度統計関連学会連合大会, pp.139, 金沢大学角間キャンパス, 金沢, 2016年9月.

[2] 田中 冬彦,
"量子統計的決定理論に基いた射影測定を選択", RIMS 研究集会 "量子システム推定の数理", 京都, 2016年10月.

[3] 田中 冬彦,
"量子統計的決定理論における量子測定 of 漸近的許容性", 2017年度統計関連学会連合大会, pp.138, 南山大学名古屋キャンパス, 名古屋, 2017年9月.

[4] 田中 冬彦,
"量子系で役立つ統計学を創る", 数学と諸分野の連携を通じた知の創造, 招待講演, 東北大学片平キャンパス, 仙台, 2017年12月.

[5] TANAKA Fuyuhiko,
"Twirling Projective Measurements in Quantum Estimation", APS March meeting, Los Angeles, USA, March, 2018.

[6] SUGIYAMA Takanori, IMORI Shinpei, TANAKA Fuyuhiko, "Self-consistent quantum tomography for reliably characterizing super-accurate quantum operations", Aspen Winter Conference on Advances in Quantum Algorithms and Computation, Aspen Center for Physics, Colorado USA, March, 2018.

[7] SUGIYAMA Takanori, IMORI Shinpei, and TANAKA Fuyuhiko,
"Self-consistent quantum tomography for characterizing super-accurate quantum operations", APS March meeting, Los Angeles, USA, March, 2018.

[8] ○田中 冬彦,
"統計研究者のための量子トモグラフィ入門", RIMS 研究集会 "高次元量子雑音の統計モデリング", 京都, 2018年11月.

[9] SUGIYAMA Takanori, IMORI Shinpei, and TANAKA Fuyuhiko,
"Reliable characterization for improving and validating accurate elementary quantum operations", APS March meeting, Boston, USA, March, 2019.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:

取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2) 研究協力者

杉山 太香典 (SUGIYAMA, Takanori)

伊森 晋平 (IMORI, Shinpei)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。