

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和元年6月4日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13846

研究課題名(和文)大自由度カオスにおける不安定性解析の実験的実現へ

研究課題名(英文) Toward an experimental realization of instability analysis for large chaotic systems

研究代表者

竹内 一将 (Takeuchi, Kazumasa)

東京大学・大学院理学系研究科(理学部)・准教授

研究者番号：50622304

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：カオスは様々な非線形現象で現れるが、その重要な特徴である不安定性を大自由度実験系で計測することは、これまで基本的に不可能であった。本研究では、その萌芽的な取り組みとして、単純な相互作用の系を対象を限定し、対称性を活用して、局所的信号の時系列から系全体の不安定性指標を全て計測する手法を開発した。本手法の有効性は数値的に検証し、精度を高める方法も提案した。実験的にはカオス回路を製作し、本手法を使う際に満たすべき条件の示唆を得た。また、少ない計算量で弱い不安定性のモード抽出を目指す方法の開発も行い、有効性を示唆する結果を得た一方で、解決すべき課題も明らかになった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

大自由度のカオス現象は、気象をはじめとする乱流現象、ある種の振動性媒質中の位相伝播や、諸説あるが心室細動など、様々な実例がある。しかしながら、カオス最大の特徴である不安定性を大自由度系で計測する実験手法が存在しないため、そうした現象のカオスとしての性質が理解されているとは言い難い。我々の成果は、単純な種類の大自由度カオス系で不安定性計測を実現するための1つの基礎となりうる手法の開発であり、将来、より現実的な系へ拡張するための端緒を開くものである。不安定性は、カオス系の予測や制御のため重要な性質であり、そのような研究が大自由度系で行われるための準備段階の研究成果という位置付けでもある。

研究成果の概要(英文)：Whereas chaos abounds in a wide variety of nonlinear phenomena, it had been basically impossible to measure its instability in large experimental systems. Here, as a first step, we developed a method for systems with a simple form of coupling. By using symmetry of the systems, our method allows us to fully quantify the chaos instability, out of a time series of a local signal. We confirmed the validity of our method numerically and proposed a few techniques to improve the accuracy. Experimentally we made a chaotic circuit and obtained some hints on conditions to use our method. Moreover, we also developed a method to extract weak instability modes with a potentially lower computational cost. Our result suggested the validity of the method, while it also revealed some issues to resolve in future studies.

研究分野：非平衡統計力学

キーワード：非線形科学 カオス 大自由度力学系 時系列解析 不安定性

1. 研究開始当初の背景

本研究課題は、大きく分けて2つの手法開発からなる。以下、それを(1)(2)と分類し、それぞれに対して背景、目的、方法、成果を報告する。各項目で用いる箇条書き番号は共通である。

(1) 大自由度のカオス現象は、気象をはじめとする乱流現象、ある種の振動性媒質中の位相伝播や、諸説あるが心室細動など、様々な実例がある。カオスの顕著な特徴の1つが不安定性であり、カオス軌道に与えた摂動の大きさの指数関数的な成長率である Lyapunov 指数によって定量化される。Lyapunov 指数は、不安定性に加え、アトラクター次元や力学系のエントロピー、カオス示量性など、カオスの様々な特徴量や概念と関係することが知られているほか、カオス系の予測やデータ同化、カオス制御でも、関係する量や概念が重要な役割を果たす。従って、Lyapunov 指数の計測は、カオス系の解析の中心的手法の1つであるが、理論やシミュレーションと異なり、実験では通常、時間発展方程式が未知のため、取得した時系列データから Lyapunov 指数を推定する必要がある。少数自由度のカオス系では、現に時系列解析によって Lyapunov 指数を推定する方法が確立されているが、大自由度のカオス系への適用は不可能である。この問題は、一般に、大自由度カオスの実験研究における大きな障壁の1つとなっている。

(2) 大自由度の系においては、数値的にも、Lyapunov 指数の計測は非常に計算コストが高い。N 自由度の系の場合、Lyapunov 指数も N 個存在するが、それを全て計測する場合の計算コストは N^3 に比例する。Lyapunov 指数は大きい順に計算されるため、最大 Lyapunov 指数や、最大に近い方の Lyapunov 指数を得るだけなら比較的小さな計算コストで十分だが、最小の Lyapunov 指数や、中程度の値をもつ Lyapunov 指数を得ようとする場合は、目的の指数が少数であっても N^3 規模の計算コストがかかってしまう。一方で、比較的最近の研究により、集団挙動を特徴づける Lyapunov モードや、輸送現象と関わる可能性のある流体 Lyapunov モードなど、ごく一部の Lyapunov 指数が重要な役割をもつ可能性が指摘されており、特定の Lyapunov 指数を小さな計算コストで求められる方法の開発が望まれている。

2. 研究の目的

(1) 時系列解析による Lyapunov 指数の測定法が大自由度系に使えないのは、時系列中の再帰回数の不足が主たる原因である。再帰とは、相空間内で、軌道が過去にいた点の近くを通る事象のことを指す。N 自由度の系では、典型的に、N が大きくなると、再帰が起こる頻度は指数関数的に小さくなってしまふ。

以上の原因を踏まえ、本研究では、相互作用が単純で対称性の高いカオス系に焦点を絞り、そのような系の時間発展の記述には必ずしも全ての変数は必要ないこと、従って、局所変数の時間発展に必要な少数個の変数だけで構成される空間で再帰を考えれば十分な可能性があることに着目した。事実、大域結合系では、局所変数と平均場の 2 変数で局所的な時間発展の記述が可能であり、近接結合系でも局所変数とその近接点の変数で十分である。そこで、大域結合系と近接結合系のそれぞれに対し、以上の発想に基づいて Lyapunov 指数を推定する手法の開発に取り組んだ。

(2) 標準手法において、Lyapunov 指数が大きい順に求まる理由は、ランダムに生成した摂動は最大 Lyapunov 指数に対応する固有な摂動方向 (Lyapunov ベクトル) の成分を含んでおり、それが最も速く成長するために、他の Lyapunov 指数で成長する成分が見えなくなるからである。一方で、仮に特定の Lyapunov 指数に対応する Lyapunov ベクトルの向きを知っていれば、それを摂動の初期条件とすることで、所与の Lyapunov 指数を直接計算することが原理的には可能である。言い換えれば、最大でない Lyapunov 指数は、特別な初期条件のもとで実現する「レアな摂動」が示す Lyapunov 指数ということだ。

近年、大偏差原理を応用してレアイベントを計測する様々な手法が開発されている。その1つがバイアスサンプリング法であり、多数の軌道を時間発展させて、軌道の複製と消滅により、目的のレアイベントを生成する軌道が高頻度で出現するようなバイアスをかける。力学系については、軌道に関して、特別な初期条件のもとで実現する「レアな軌道」を抽出するバイアスサンプリング法が提案されている (引用文献①)。そこで本研究では、同様の手法を摂動に対して適用することで、先に説明した「レアな摂動」を生成し、その Lyapunov 指数を計測することで、最大以外の Lyapunov 指数を効率的に取得できるのではないかという着想を得た。これに基づく手法の開発に取り組んだ。

3. 研究の方法

(1) 大自由度カオス系の時系列解析については、①大域結合系、②近接結合系に対して手法開発を行い、その有効性を数値的に検証した。また、実験的検証を念頭に③複数のカオス回路の結合系を製作し、対称性の活用による解析精度の改善が可能か否かを検討した。

①大域結合系として、局所変数 $x_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) が平均場 $m(t) = (1/N) \sum_{j=1}^N x_j(t)$ と相互作用して時間発展する系 $x_j(t+1) = f(x_j(t), m(t))$ を考える。微分方程式系も、時刻を離散化すれば同じ形式で表されるため、本手法の範疇に入っている。このような系を対象に、特定の局所変数 (例えば $x_1(t)$) と平均場 $m(t)$ の時系列データだけから、 N 個の Lyapunov 指数全てを推定する手法を開発した。

本手法は、大きく分けて、「縮約空間での再帰解析による擬 Jacobian 行列 ($\partial f/\partial x, \partial f/\partial m$) の推定」「推定された $f, \partial f/\partial x, \partial f/\partial m$ に基づく軌道と接空間ベクトルのエミュレーション」からなる。前半部分では、 $x_1(t)$ の摂動 $\delta x_1(t)$ の時間発展が $\delta x_1(t+1) = (\partial f/\partial x)\delta x_1(t) + (\partial f/\partial m)\delta m(t)$ のようにかけることに注目し、 $x_1(t)$ と $m(t)$ だけが張る縮約空間で再帰を検出して、線形再帰によって行列 ($\partial f/\partial x, \partial f/\partial m$) を推定する。(簡単のため $x_j(t)$ が 1 成分とすると) 縮約空間の次元は 2 であり、本来の位相空間の次元 N よりきわめて小さいため、再帰頻度の不足という問題が解決している。ただし、データ点により再帰点の個数が異なるため行列の推定精度にばらつきがあり、精度の悪いデータ点が最終結果に悪影響を及ぼすことを防ぐため、そのようなデータ点を判別し除外する方法を提案した。手法の後半部分では、推定で得た擬 Jacobian 行列 ($\partial f/\partial x, \partial f/\partial m$) から、本来の接空間の Jacobian 行列を構成することで、本来の位相空間における軌道・接空間における摂動ベクトルをコンピュータ上で仮想的に時間発展 (エミュレーション) させる。その際に、時系列データ点 ($x_1(t), m(t)$) に対する $f, \partial f/\partial x, \partial f/\partial m$ の値から、エミュレーションで現れる任意の ($x_j(t), m(t)$) での値を内挿または外挿により推定する必要がある。

以上の手法を大域結合ロジスティック写像、大域結合リミットサイクル振動子に対して適用し、時系列データ ($x_1(t), m(t)$) だけを用いて、 N 個の Lyapunov 指数のスペクトルを推定した。結果は、標準的な数値計算手法により求めた Lyapunov スペクトルと比較し、本手法の有効性を検証した。

②近接結合系としては、結合写像格子を念頭に、局所変数 $x_j(t)$ が近接点 $x_{j-1}(t), x_{j+1}(t)$ とだけ相互作用して時間発展する系を考える。偏微分方程式系の場合は、空間を差分法で離散化することにより、同様の形で書くことができる。高階の空間微分を含む場合は、次近接点等も必要になるが、本質的な違いはない。その他の点は①大域結合系の場合と同様であり、ロジスティック結合写像格子に対して本手法を実装し、Lyapunov スペクトルを推定した。偏微分方程式系の例としては、1次元 Kuramoto-Sivashinsky 方程式を対象に本手法の適用を試み、現在も取り組みを続けている。

③以上の開発手法の有効性や精度を実験系で検証する場合、真の時間発展方程式が比較的精度よくわかるような系を選定する必要がある。本研究では、カオス回路として知られる Chua 回路を製作し、2つの Chua 回路を抵抗を介し結合させた系を構成した (図 1)。この双方向結合 Chua 回路は、要素数が 3 以上の大域結合系や近接結合系に拡張することが容易である。本研究では、要素数が 2 の双方向結合 Chua 回路に対し、部分回路 j の信号 $v_1^{(j)}$ を計測し、 $j = 1, 2$ の入れ替え操作に対する不変性を利用して再帰頻度を高めることで、Lyapunov 指数の推定精度が向上するかどうかを検証した。

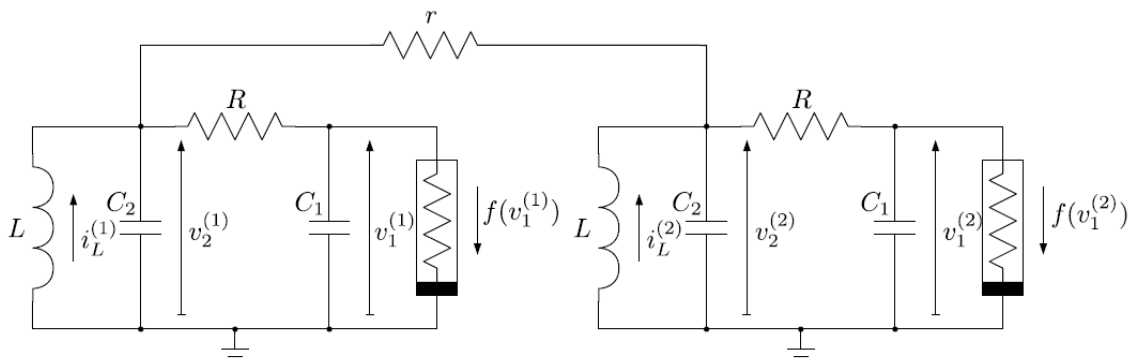


図 1: 双方向結合 Chua 回路の回路図

(2) バイアスサンプリング法による特定の Lyapunov 指数の計測方法の開発については、 N 個の摂動ベクトル $\delta x_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) を用意し、所与の力学系の接空間で時間発展させる。その際、各ステップでの摂動の伸び率 $s_j(t+1) = \|\delta x_j(t+1)\|/\|\delta x_j(t)\|$ を測り、各軌道のクローン数がおおよそ $s_j(t+1)^{-\alpha}$ に比例するように、軌道を複製または消滅させる。元来の力学系の時間発展は $\alpha = 0$ に相当する。パラメータ α のもとでの、時間幅 T の間の有限時間 Lyapunov 指数 λ_T の確率密度 $P_\alpha(\lambda_T; T)$ は、大偏差原理に従うと $P_\alpha(\lambda_T; T) \sim \exp[-T(I(\lambda_T) + \alpha\lambda_T)]$ のような形で書けることが期待される。 α が大きいほど、小さな Lyapunov 指数をとる摂動ベクトルが支配的となり、最大以外の Lyapunov 指数が典型値として計測できるようになると見込まれる。そこで、そのような手法で Lyapunov 指数を計測するプログラムを製作し、本手法の有効性を検証した。また、レート関数 $I(\lambda)$ を計測し、その性質について検討した。適用対象としては、まずは通常行列の固有

値問題を対象に本アルゴリズムの基本特性を評価したのちに、Lozi 写像、Hénon 写像に対して実装、調査を行った。

4. 研究成果

(1) 大自由度カオス系の時系列解析について、①大域結合系に関しては、大域結合ロジスティック写像、大域結合リミットサイクル振動子ともに、提案手法が Lyapunov スペクトルを正しく計測できることを実証した (図 2)。また、推定精度の低いデータ点を取り除く際の閾値の設定方法や、振動子の場合の位相並進対称性など、所与の系が有する対称性を活用する方法など、Lyapunov 指数の推定精度を改善する方法も提案し、比較検証を行った。以上の成果は論文にまとめ、出版した (引用文献②)。本論文は、Chaos 誌の fast track article として出版されている。

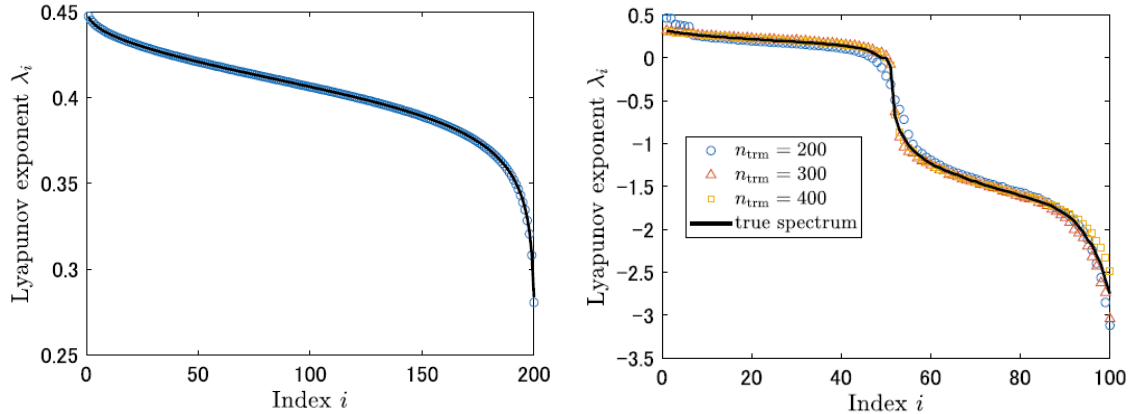


図 2: 大域結合系における提案手法の検証結果。左図は大域結合ロジスティック写像、右図は大域結合リミットサイクル振動子の場合であり、カラー記号は本提案手法による時系列解析の結果、実線は標準手法により時間発展方程式から求めた真の Lyapunov スペクトルである。右図においては、推定精度の低いデータ点を取り除く際の閾値を変化させ、推定結果の精度を比較している。本研究成果の論文 (引用文献②) から転載。

②近接結合系に関しては、ロジスティック結合写像格子に対して提案手法を適用し、大域結合系と同様に、 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ の時系列データから Lyapunov スペクトルを正しく推定できることを実証した (図 3)。1次元 Kuramoto-Sivashinsky 方程式については、差分法により空間を離散化したうえで、 $(u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), u_5(t))$ の時系列データから Lyapunov スペクトルの推定に取り組んでいる。次近接まで使うのは、Kuramoto-Sivashinsky 方程式に含まれる 4 階微分 $\partial^4 u / \partial x^4$ の差分近似の表現に必要なからである。その結果、縮約空間の次元が 5 であり、上述の例よりも大きい場合、エミュレーション時の内挿・外挿の判定や近接データ点の検出に使うアルゴリズムに工夫が必要となり、取り組んでいる。以上が本課題期間終了時点での研究状況である。

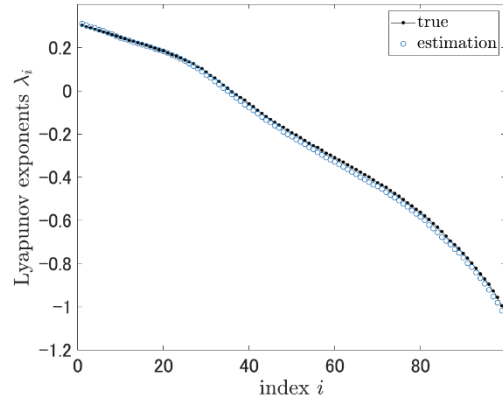


図 3: ロジスティック結合写像格子における提案手法の検証結果

③双方向結合 Chua 回路については、部分回路のラベル j に関する入れ替え対称性を利用して再帰頻度を高めて、遅延座標系の埋め込みに基づく時系列解析手法を適用して Lyapunov 指数を推定し、同対称性を利用しない場合の結果と推定精度を比較した。結果、本研究で調査した範囲においては、入れ替え対称性を活用しても、必ずしも推定結果の向上に繋がるわけではないことが判明した。双方向結合 Chua 回路は、結合定数によってはカオス同期が発生し、その場合は入れ替え対称性を使っても実効的な統計的サンプル数がさほど増えていない可能性がある。また、各部分回路で用いた回路素子のパラメータ等、回路ごとのばらつきによる影響も考えられる。対称性を利用して再帰頻度・推定精度を高める場合は、系の各要素が均一であり、同期等が起こっていないことが、本研究で考案した手法の適用にとっても重要であることが示唆される結果となった。

(2) バイアスサンプリング法による特定の Lyapunov 指数の計測手法開発については、対称行列の固有値、Lozi 写像の Lyapunov 指数とともに、バイアスパラメータ α の増大に伴って、最大でな

い固有値・Lyapunov 指数の近似値が正しく求まることを実証した (図 4)。一方で、 α の増大に伴い近似精度が低下する傾向があり、近似を決める要因等は調査中である。また、Hénon 写像については、 α が大きいと Lyapunov 指数の推定に失敗することがわかり、Hénon 写像の特徴である非双極性などとの関連を調査中である。以上のように、今後解明すべき問題点や、大自由度系への拡張など、課題は残されているが、最大以外の Lyapunov 指数を評価するために本手法の原理が有効であると確認できた。

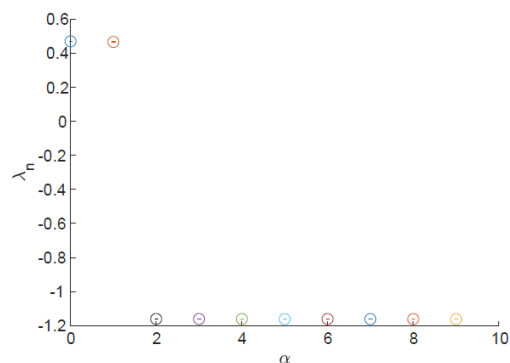


図 4: 本研究で開発したバイアスサンプリング法を Lozi 写像に対し適用した結果。Lozi 写像の Lyapunov 指数は $\lambda_1 \approx 0.47$, $\lambda_2 \approx -1.16$ であり、 $\alpha \geq 2$ では λ_2 が検出できている。

以上のように、本研究によって、特に大自由度カオス系の時系列解析に関して、実験でも適用可能と期待できる手法の開発に成功した。本手法は未だ発展・拡張すべき点が多いが、大自由度カオス実験系に適用可能な手法の最初の 1 つを提示できた意義は大きいと考えている。なお、本課題遂行中に、機械学習を用いて、大自由度カオス系の Lyapunov 指数を推定する手法が別グループから提案され、話題となった (引用文献③)。本課題の開発手法とは原理が異なり、適用対象やパラメータの調整方法も違うため、相補的な位置付けにあると考えられる。このような研究が増えることで、自然現象における大自由度カオスの理解が一層進むことを期待している。

<引用文献>

- ① J. Tailleur and J. Kurchan, Nature Physics, **3**, 203 (2007).
- ② T. P. Shimizu and K. A. Takeuchi, Chaos **28**, 121103 (2018).
- ③ J. Pathak et al., Chaos **27**, 121102 (2017).

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① Taro P. Shimizu and Kazumasa A. Takeuchi, “Measuring Lyapunov exponents of large chaotic systems with global coupling by time series analysis”, Chaos **28**, 121103 (2018), 査読あり, DOI: 10.1063/1.5066087
- ② X. Ding, H. Chaté, P. Cvitanović, E. Siminos, and K. A. Takeuchi, “Estimating the Dimension of an Inertial Manifold from Unstable Periodic Orbits”, Phys. Rev. Lett. **117**, 024101 (2016), 査読あり, DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.024101

[学会発表] (計 42 件)

- ① Y. T. Fukai and K. A. Takeuchi, “Universal scaling laws of growth processes and their implications for chaos instability”, The 10th Dynamics Days Asia Pacific (招待講演) (国際学会), 2018.
- ② T. P. Shimizu and K. A. Takeuchi, “Measuring Lyapunov spectrum of large chaotic systems with global coupling by time series analysis”, The 10th Dynamics Days Asia Pacific (国際学会), 2018.
- ③ T. P. Shimizu and K. A. Takeuchi, “Measuring Lyapunov spectrum of large chaotic systems with global coupling by time series analysis”, Advances in Physics of Emergent Orders in Fluctuations (国際学会), 2018.
- ④ 清水太朗、竹内一将, “時系列解析による連続時間大域結合カオスの Lyapunov スペクトルの測定”, 日本物理学会 2018 年次大会, 2018.
- ⑤ 清水太朗、竹内一将, “対称性を利用した時系列解析による大域結合カオスの不安定性測定”, 理研シンポジウム・iTHES/iTHEMS 研究会 2017 非平衡物理の最前線—素粒子・宇宙から物性まで—, 2017.
- ⑥ 清水太朗、竹内一将, “時系列解析による大域結合力学系の不安定性測定”, 第 11 回 物性科学領域横断研究会 (領域合同研究会), 2017.
- ⑦ 清水太朗、竹内一将, “時系列解析による大域結合系の Lyapunov スペクトル測定”, 日本物理学会 2017 年 秋季大会, 2017.
- ⑧ Taro Shimizu and Kazumasa A. Takeuchi, “Measuring Lyapunov spectrum of globally coupled systems by time series analysis”, 新学術領域「ゆらぎと構造の協奏」第 4 回領域研究会, 2017.
- ⑨ Kazumasa A. Takeuchi, “Geometry-dependent interface fluctuations and their implications for chaos instability”, Interdisciplinary Applications of Nonlinear Science (招待講演) (国際学会), 2016.

⑩ X. Ding, H. Chaté, P. Cvitanović, E. Siminos, 竹内一将, “不安定周期軌道は慣性多様体を捉えられるか?”, 日本物理学会 2016 年 秋季大会, 2016.

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

研究室ウェブページ

<http://labjp.kaztake.org/>

6. 研究組織

(2) 研究協力者

研究協力者氏名 : 清水 太朗

ローマ字氏名 : Taro P. Shimizu

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。