

令和 2 年 6 月 5 日現在

機関番号：12608

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2019

課題番号：16K13847

研究課題名（和文）量子散逸系における非線形振動現象に対する位相縮約理論の構築

研究課題名（英文）Formulation of phase reduction theory for nonlinear oscillations in quantum dissipative systems

研究代表者

中尾 裕也（Nakao, Hiroya）

東京工業大学・工学院・教授

研究者番号：40344048

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：量子散逸系における非線形振動現象に対する位相縮約理論を構築した。近年のナノテクノロジーの進歩により、光-機械系やレーザー系など、量子力学的な効果が重要となるマイクロな物理系の非線形振動と、その量子情報処理等への応用に興味を持たれている。古典物理系の非線形振動現象に対しては、系のダイナミクスを簡潔な位相方程式で表す手法である位相縮約理論が古くから発展しており、系の同期現象の解析に用いられてきたが、この手法は量子非線形振動現象には適用できなかった。本研究では、量子性がさほど強くない半古典的な状況に着目して量子非線形振動に対する位相縮約理論を定式化した。さらにこの理論を用いて系の同期現象を解析した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、量子散逸系の非線形振動現象に対して適用可能な位相縮約理論を定式化して、これを用いて量子的な非線形振動子の同期現象を解析した。さらに、この理論に基づいて、量子非線形振動子の同期の安定性を最適化する周期外力の形状を求め、実際に数値シミュレーションにより最適化した周期外力が単なる調和外力に比べより高い安定性を実現し、より速い同期状態への収束に導くことを示した。近年、マイクロな物理系に関する実験技術の発展が著しく、本研究で定式化した量子非線形振動子の同期現象の解析と制御に関する基礎理論は、将来的に量子センサーや量子情報処理などに応用できる可能性がある。

研究成果の概要（英文）：Phase reduction theory for nonlinear oscillations in quantum dissipative systems was developed. Recent advances in nanotechnology arose interest in nonlinear oscillations in microscale physical systems like optomechanical and laser systems, in which quantum effects play important roles, and their application to quantum information processing. For nonlinear oscillators in classical physical systems, phase reduction theory, which allows us to represent the system dynamics by a simple phase equation, had been developed and used to analyze their synchronization dynamics. However, this method had not been applicable to quantum nonlinear oscillators. In this study, we formulated a phase reduction theory for quantum nonlinear oscillators by focusing on the semi-classical regime where the quantum effect is not too strong. We then used the theory to analyze synchronization dynamics of the system.

研究分野：非線形物理学

キーワード：量子散逸系 非線形振動 位相縮約理論 同期現象 最適化

## 1. 研究開始当初の背景

近年のナノテクノロジーの進歩により、マイクロな光-機械系や量子光学系などの量子力学的な効果が重要となる散逸系の非線形振動現象と、その量子情報処理などへの応用に興味を持たれていた。理論的には、量子散逸系における非線形振動現象の簡潔な数理モデル（量子 van der Pol 振動子, T. E. Lee and H. Sadeghpour, 2013）の提案を契機に、量子非線形振動とその同期現象に関する様々な数値シミュレーションが行われていた。古典散逸系の非線形振動子に対しては、系のダイナミクスを簡潔な位相方程式で表す手法である位相縮約理論が古くから発展してきており、非線形振動子の同期現象の解析の標準的な手法として幅広く適用され、様々な自然現象の解明に役立てられてきていた。しかし、そのような手法は量子散逸系の非線形振動に対しては定式化されておらず、標準的な手法に基づく同期現象の理論的な解析が困難な状況にあった。

## 2. 研究の目的

本計画計画の目的は、古典散逸力学系の非線形振動を扱うための基礎理論である位相縮約理論を拡張して、量子散逸系における非線形振動の同期現象を扱うための位相縮約理論を定式化することであった。これにより、従来は量子マスター方程式の直接数値シミュレーションのみによって解析されていた量子同期現象に対して、古典系の非線形振動子と同様の標準的な理論解析を行うこと、さらに、位相縮約理論に基づく量子非線形振動子の制御や最適化に関する問題を扱うことを目的としていた。

## 3. 研究の方法

本研究は数理的な研究であり、理論的な定式化と、その妥当性を検証するための数値シミュレーションによる研究を実施した。まず、半古典近似のもとで、量子散逸系の非線形振動子に対する位相縮約理論を定式化した。次に、この理論の応用として、周期外力による量子非線形振動子の引き込み同期現象を解析し、同期状態の安定性を最大化するような外力の形状を導出した。また、量子非線形振動子に対する弱測定フィードバックによるコヒーレンスの向上と縮約方程式に基づく位相制御に関する解析や、半古典近似の成立しない状況下での量子非線形振動子の位相の定義に関する解析を行った。その他、関連するいくつかの研究も実施した。

## 4. 研究成果

- 量子性がそれほど強くなく、半古典近似が可能な物理的状況にある量子散逸系の非線形振動に着目して、位相縮約理論の定式化を行った。量子散逸系の状態を表す密度演算子の時間発展は量子マスター方程式によって記述されるが、量子光学などの理論において標準的なコヒーレント状態に基づく Glauber-Sudarshan の P 表示の方法を用いることにより、密度演算子の時間発展を、対応する位相空間での擬確率分布の従う偏微分方程式により表現できる。半古典近似が可能な場合、この偏微分方程式の3階以上の微分項を落とすことにより量子 Fokker-Planck 方程式を得ることができ、さらにこれに対応する古典的な確率微分方程式である Langevin 方程式を導くことができる。この Langevin 方程式の決定論的な項は、系の古典極限における決定論的な運動を表す力学系を表す。

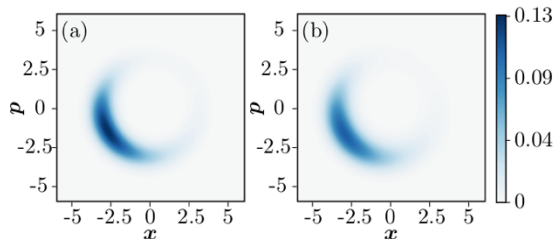
系が量子非線形振動子であることから、この力学系が漸近安定なリミットサイクル振動解を持ち、また半古典近似が成り立つことから、量子ノイズを表す確率論的な項の影響は小さいという仮定をおき、決定論的な部分の表す力学系のリミットサイクル振動解に基づいて、従来の位相縮約理論と同様の方法で系の漸近位相を定義した。これにより、系に与えた弱い摂動に対する漸近位相の応答を表す位相感受関数の計算を可能とした。また、白色ノイズとみなすべき量子ノイズからの非線形振動子の振動数への補正を見積もった。これにより、半古典近似のもとで、弱い外力を受けた量子非線形振動子を記述する量子マスター方程式を、振動子の漸近位相の時間発展を表す一次元の簡潔な伊藤型確率微分方程式に縮約することができた。また、漸近位相の値から、系の状態が古典極限でのリミットサイクル軌道に近い状態にあるという仮定のもとで、もとの系の密度演算子を近似的に与える表現を得た。

このようにして導出した量子非線形振動子を記述する簡潔な位相方程式に基づく典型的な解析例として、弱い周期外場に駆動される量子 van der Pol 振動子系の引き込み同期現象を解析した。このとき、スクイーミング項の効果も含めることにより、理論の一般性を系の古典極限における軌道の対称性が破れたより広い領域にて確認した。をその結果、系の周波数スペクトルや平均振動数のシフト、また、再構築した密度演算子の Wigner 分布などについて、もとの系の直接数値シミュレーションと良く一致する結果を得た。これにより、半古典近似のもとでは、量子非線形振動子に対しても、標準的な位相縮約理論と同様の方法による解析が可能であることを示した。

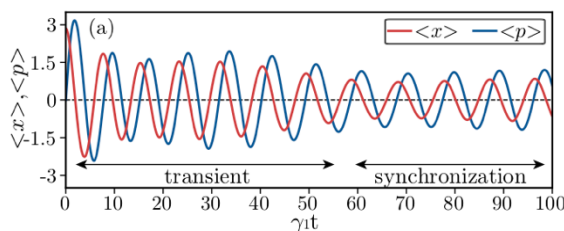
- 2) 定式化した位相縮約理論の制御や最適化への応用として、量子非線形振動子の周期外力による引き込み同期状態の安定性の最適化問題を解析した。位相縮約によって得られた位相方程式を用いることにより、外力に同期した量子非線形振動子の線形安定性を、系の位相感受関数と外力の波形の汎関数として表すことができる。この汎関数を外力の強度などに関する拘束条件のもとでラグランジュの未定乗数法を用いて最大化することにより、最適な周期外力の波形を理論的に導出することができた。系の直接数値シミュレーションにより、導出した最適化な周期外力によって引き込み同期が成立するまでの時間が単なる調和外力の場合に比べて短縮され、安定性が向上していることを確認した。
- 3) 周期外力を受けた量子非線形振動系に対する弱い連続測定の効果を取り入れた確率的量子マスター方程式の数値シミュレーションを行い、測定の反作用によって周期外力に対する系のコヒーレンスが向上することを見出した。さらに、縮約した位相方程式に基づくフィードバック制御による位相の制御を導入することによって、測定とフィードバックの両者の効果を用いて周期外力に対する引き込み同期の精度を向上できることを発見した。この内容に関する論文は現在投稿中である。
- 4) 半古典近似が妥当ではない量子性に強い状況にある量子非線形振動子に対しても適用できるような、系の漸近位相の定義に関する解析を行った。その結果、随伴リウビル超演算子の固有演算子に基づく量子力学的な漸近位相の定義を提案した。この漸近位相は、半古典近似では従来の漸近位相を再現する一方、量子性の強い領域においても系の状態に対して妥当な位相の値を与えることを数値シミュレーションにより検証した。この内容に関する論文は現在投稿中である。

以上の量子非線形振動子に関する理論解析に加え、古典的な非線形振動子の位相縮約法や、位相-振幅縮約法に関する種々の研究も実施し、Koopman 作用素に基づく非線形力学系の解析手法との関係を議論するとともに、相互同期を安定化するような相互作用関数の最適化や、大自由度力学系の非線形振動に関する解析も実施した。これらの理論的な結果は、半古典近似のもとでの量子非線形振動子に対しても適用できる。これらの成果についても論文などにより公表した。

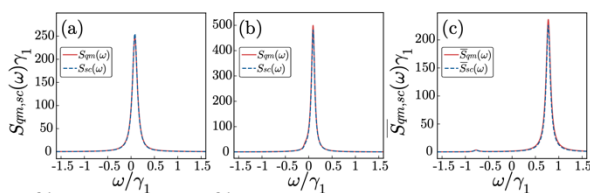
近年、量子性を示すミクロな物理系に関する実験技術の発展が著しく、本研究で定式化した量子非線形振動子の同期現象の解析と制御に関する基礎理論は、いずれ量子非線形振動が実験的に実現された際にはその解析に役立つとともに、量子非線形振動現象の量子センサーや量子情報処理などへの応用に将来的に寄与する可能性があると考えている。



[図] 調和外力で駆動した量子 van der Pol 振動子の密度演算子から得た Wigner 分布。(a) は縮約した位相方程式から再構築したもので、(b) はもとのマスター方程式の直接数値シミュレーションによって得られたもの。



[図] 調和外力で駆動した調和外力で駆動した量子 van der Pol 振動子が外力に引き込み同期する過程。振動子の位置と運動量の期待値の時間発展を示したもの。



[図] 調和外力で駆動した調和外力で駆動した量子 van der Pol 振動子の周波数スペクトル。(a-c) は異なるパラメータの結果。量子マスター方程式の直接数値計算と位相縮約に基づく近似計算はよく一致している。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 14件／うち国際共著 1件／うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Nakao Hiroya, Yasui Sho, Ota Masashi, Arai Kensuke, Kawamura Yoji	4. 巻 28
2. 論文標題 Phase reduction and synchronization of a network of coupled dynamical elements exhibiting collective oscillations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science	6. 最初と最後の頁 045103 ~ 045103
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5009669	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shirasaka Sho, Watanabe Nobuhiro, Kawamura Yoji, Nakao Hiroya	4. 巻 96
2. 論文標題 Optimizing stability of mutual synchronization between a pair of limit-cycle oscillators with weak cross coupling	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Physical Review E	6. 最初と最後の頁 012223(12)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevE.96.012223	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kawamura Yoji, Shirasaka Sho, Yanagita Tatsuo, Nakao Hiroya	4. 巻 96
2. 論文標題 Optimizing mutual synchronization of rhythmic spatiotemporal patterns in reaction-diffusion systems	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Physical Review E	6. 最初と最後の頁 012224(12)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevE.96.012224	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Nakao Hiroya, Yasui Sho, Ota Masashi, Arai Kensuke, Kawamura Yoji	4. 巻 28
2. 論文標題 Phase reduction and synchronization of a network of coupled dynamical elements exhibiting collective oscillations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science	6. 最初と最後の頁 045103 ~ 045103
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5009669	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sho Shirasaka, Wataru Kurebayashi, and Hiroya Nakao	4. 巻 27
2. 論文標題 Phase-amplitude reduction of transient dynamics far from attractors for limit-cycling systems	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Chaos	6. 最初と最後の頁 023119-1-7
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.4977195	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sho Shirasaka, Wataru Kurebayashi, and Hiroya Nakao	4. 巻 95
2. 論文標題 Phase reduction theory for hybrid nonlinear oscillators	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Physical Review E	6. 最初と最後の頁 012212-1-15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevE.95.012212	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoji Kawamura and Hiroya Nakao	4. 巻 94
2. 論文標題 Optimization of noise-induced synchronization of oscillator networks	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Physical Review E	6. 最初と最後の頁 032201-1-14
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevE.94.032201	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kato Yuzuru, Nakao Hiroya	4. 巻 101
2. 論文標題 Semiclassical optimization of entrainment stability and phase coherence in weakly forced quantum limit-cycle oscillators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Physical Review E	6. 最初と最後の頁 033012 [1-15]
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevE.101.012210	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kuramoto Yoshiki, Nakao Hiroya	4. 巻 377
2. 論文標題 On the concept of dynamical reduction: the case of coupled oscillators	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences	6. 最初と最後の頁 20190041 [1-25]
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1098/rsta.2019.0041	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kato Yuzuru, Yamamoto Naoki, Nakao Hiroya	4. 巻 1
2. 論文標題 Semiclassical phase reduction theory for quantum synchronization	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Physical Review Research	6. 最初と最後の頁 012210 [1-9]
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevResearch.1.033012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計14件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 11件)

1. 発表者名 加藤謙, 中尾裕也
2. 発表標題 量子散逸系の非線形振動に対する半古典位相縮約理論の定式化
3. 学会等名 日本物理学会 2018年秋季大会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 加藤謙, 中尾裕也
2. 発表標題 量子散逸系の非線形振動に対する最適化理論の適用
3. 学会等名 日本物理学会 第74回年次大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加藤謙, 中尾裕也
2. 発表標題 量子散逸系の同期現象に対する半古典近似を用いた位相縮約理論の定式化
3. 学会等名 量子情報技術研究会 (QIT)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Semiclassical Phase Redcution Theory for Quantum Dissipative Nonlinear Oscillators
2. 発表標題 Yuzuru Kato, Hiroya Nakao
3. 学会等名 APS March Meeting 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sho Shirasaka, Wataru Kurebayashi and Hiroya Nakao
2. 発表標題 Isostable Reduction for Stable Limit-Cycling Systems
3. 学会等名 SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems (SIAMDS17), Snowbird Ski and Summer Resort, Snowbird, Utah, USA (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Wataru Kurebayashi, Sho Shirasaka and Hiroya Nakao
2. 発表標題 Optimal Parameter Selection for Extended Dynamic Mode Decomposition
3. 学会等名 SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems (SIAMDS17), Snowbird Ski and Summer Resort, Snowbird, Utah, USA (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuzuru Kato, Hiroya Nakao
2. 発表標題 Optimal Waveform for Fast Entrainment of Weakly Forced Quantum Nonlinear Dissipative Oscillators
3. 学会等名 58nd IEEE Conference on Decision and Control, Nice, France (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 中尾裕也, 長谷川幹雄, 合原一幸	4. 発行年 2017年
2. 出版社 コロナ社	5. 総ページ数 262
3. 書名 情報ネットワーク科学シリーズ 第4巻 ネットワーク・カオス 非線形ダイナミクス, 複雑系と情報ネットワーク	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----