様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 ２５ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2016～2017
課題番号：１６Ｋ１３８５０

研究課題名（和文）負の宇宙項をもつアインシュタイン方程式乱流・特異性の古典乱流力学からの研究

研究課題名（英文）Turbulence and singularity of the Einstein equation with a negative cosmological constant studied from classical turbulence theory

研究代表者
松本　剛（Matsumoto, Takeshi）

京都大学・理学研究科・助教

研究者番号：２０３４６０７６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,100,000円

研究成果の概要（和文）：負の宇宙項をもつ球対称(1次元)重力方程式の解が乱流になることが数値的に示されている。この乱流解は大域的な保存量の存在下で、あるスケーリング則に従って自発的に小さいスケールの構造を加速的に形成して有限時間で無限小の構造をつくる(特異性形成)と考えられている。
この乱流解および特異性を、我々の身の回りにある流体が従うナビエ・ストークス方程式から得られる乱流の解析手法を用いて研究した。特に、保存量の乱流特有の非線形分配の描像(エネルギーカスケード描像)を応用して解析したところ、スケーリング則の指数を説明するには至らなかったが、小スケールの構造形成がこの描像で記述できることがわかった。

研究成果の概要（英文）：It has been known that a certain spherical symmetric Einstein equation with a negative cosmological constant has a turbulent solution by a numerical simulation. The equation has a global conservation law. The turbulent solution successively generates small-scale activities by respecting a specific scaling law. The generation occurring in an accelerated manner is considered to reach the infinitesimally small scale in a finite time.
We studied this turbulent solution and its singular behavior with the method of analyzing turbulence of the Navier-Stokes equations. In particular, we adopted the picture of the energy cascade in the Navier-Stokes turbulence to the conservative quantity of the turbulent solution. So far we were not able to explain the exponent of the power-law scaling law phenomenologicaly. Nevertheless, the cascade picture shed a new light to the small-scale generation mechanism of the turbulent solution.

研究分野：流体物理学

キーワード：古典乱流のカスケード　スケーリング則　偏微分方程式の爆発解

１．研究開始当初の背景

物理学では､様々な現象を記述する方程式が様々な形で得られている。こうした方程式を通じて現象の裏にある物理を定性的、定量的に理解することが、物理学のひとつの大きな目的である。しかし、方程式の解がコンパクトに求まることは稀である。特に、時間と共に激しく変動するダイナミックな現象に対応する解はなおさら難しく、計算機によるシミュレーションに頼ることになる。こうした計算機シミュレーションが明らかにしたことは、カオス解などの乱れた解には方程式の個別性を越えた一般的な性質があることである。

さて、本研究で軸となるのは、乱流である。我々の身近にある水や空気の流れは染料や煙などで可視化をすると、渦が複雑にからみあってダイナミックに変化する乱流の状態にあることがわかる。この乱流は古典力学のナビエ・ストークス方程式の解である。ここで、先述のカオス解のように、非線形性の強い様々な偏微分方程式が乱流解をもつものとして、その乱流解には方程式の個別性を越えた一般的な性質があるだろうか？ その答えはおそらくイエスである。この乱流一般性の観点に立つと、ナビエ・ストークス乱流での知見を、他の方程式の乱流解の整理や理解に応用することを思い立つ。むしろ、この応用がある程度成功した時点で、先の問いの答えがイエスであると結論できると言ったほうが適切かもしれない。

ここで注目するのは､物質と重力場の関係を記述するアインシュタイン方程式の乱流解である。近年、２つのブラックホールの衝突などの激しいダイナミックなアインシュタイン方程式の解が計算機シミュレーションによって求められ、解析されている。本研究ではそうした現実的な設定ではなく、負の宇宙項をもつ球対称な系の乱流解を対象とする。これは、ゲージ重力対応（AdS/CFT 対応）の結果として、弦理論のモデルから得られたものである。そのなかで最も単純な設定と思われる方程式(以下ミニマル系と呼ぶ)が計算機シミュレーションされ、2011 年に乱流解が報告された[1]。このミニマル系は空間 1 次元(動径成分)、時間を独立変数として、スカラー場による計量テンソルをパラメトライズする量が従属変数となる非線形、非局所の偏微分方程式である。また、質量に対応する積分保存量があるように設定されている。乱流解と呼ばれる理由は、保存量である質量のスケール分布がべき的になること、また、スケール間の質量の非線形輸送が特徴的であると考えられることによる。前者の性質は、古典乱流の(非粘性)保存量であるエネルギーのスケール分布(エネルギースペクトル)がべき的になることに対応する。後者の性質は、古典乱流のエネルギーカスケードに対応する。こうした諸性質の定性的な側面には、ミニマル系をさらに現象論的にモデル化する研究などから理解が得られていた。しかし、定量的な側面について踏み込んだ研究はなかった。

２．研究の目的

このミニマル系の乱流解の定量的な側面を、古典乱流の方法論(強乱流、波動乱流)を用いて明らかにする。具体的には、質量のスケール分布にあらわれるべき則のべき指数を現象論的、半現象論的に明らかにする。また、この乱流揺らぎの特徴づけを行う。具体的には、ある時刻での最小スケールをどのように特徴づけるか、また、この最小スケールが発展する際の特徴的時間スケール等を明らかにする。また、有限時間で無限小のスケールの構造形成が行われ得るか否か(特異性形成)についても検討する。

３．研究の方法

先行研究[1]と同様のミニマル系の計算機シミュレーションを高解像度で長時間にわたって行う(追試を行う)。その結果として得られるデータの解析を、主に古典乱流のデータ解析方法を用いて、乱流揺らぎの特徴づけを行う。その後に、古典乱流の理論解析手法や非線形動力学の手法を用いて、この諸特徴を定量的に説明することを試みる。

４．研究成果

先行研究[1]の計算機シミュレーションの方法は文献[2]で詳述されている。球座標系の原点と無限遠点での境界条件が反射的であること、また積分保存量の拘束が境界条件にも反映する点で、技術的に込み入っている。同時に、ミニマル系は自発的に突起状の解を形成し、その突起の高さが有限の時間でおそらく無限大になると考えられている(物理的には、ホライズンの形成に対応する)。この解の性質を反映して、計算機シミュレーションは数値誤差が極力はいらない方法をもちいることが致命的に重要である。本研究のスタート時点では境界条件の数値的な取扱いに起因する数値的不安定性が大きな障害となり、長時間のシミュレーションが不可能であった。文献[2]で数値的不安定性を回避する方法が述べられているが、その方法を実装するにあたっては細部に複数の任意性があった。このため当初の計画よりも長い時間をかけての試行錯誤が必要であった。この結果、問題の数値的不安定性は回避することができて、先行研究[1]の追試が可能となった。

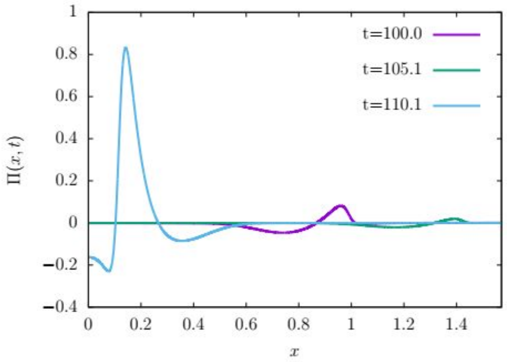

図１　本研究のシミュレーションで得られた計量をパラメトライズする量の空間プロファイル(3 時刻のものを示す)。この図にあるパルスが両端で反射を繰り返して、パルスの高さが大きくなり、幅が狭くなっていく。

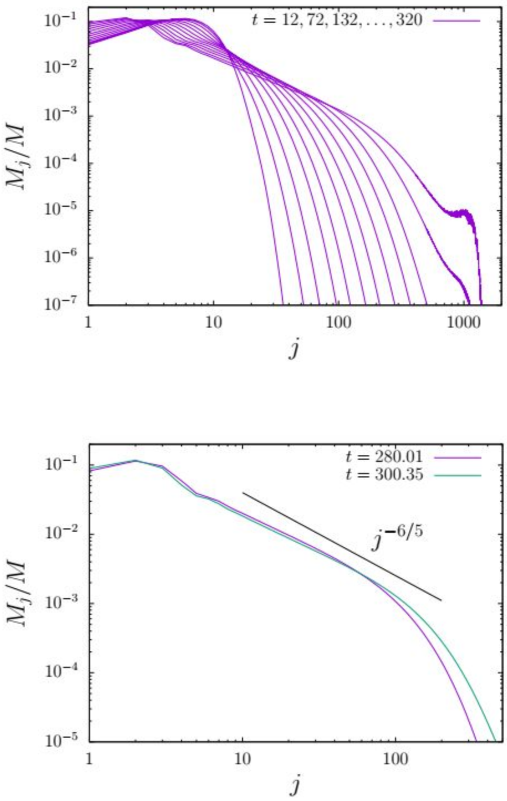

図 2　本研究のシミュレーションで得られた質量スペクトルの時間発展(上図)。グラフは左から右の線にむかって時間が大きくなる。初期に大きいスケールにのみ集中していた質量が、時間の経過とともに小さいスケールへと非線形性によって輸送されていることがわかる。さらに、中間のスケールでは質量スペクトルが冪関数に漸近していく様子がわかる。特に、後の２時刻の質量スペクトルを下図に示す。中間領域の冪関数の形を大きく変えずに小スケールへスペクトルが発達していく様子は、古典乱流の発達過程とよく似ている。

本研究のシミュレーションで得られた解の時間発展を図１に示す。これを観察すると、このミニマル系は散逸がない方程式であることを反映して、発展の様子は非粘性バーガース方程式のものと感覚的に近い。初期条件にも依存するが、ミニマル系の振舞いは、全空間にわたって細かな乱れが自発的に生成されるものではなく、ひとつのパルスが境界条件での反射を繰り返すとともにパルス高さが指数関数的に増大する初期条件周辺では、解の振幅の最大値がオーダー1 であったものが時刻 300 では 10^4 のオーダーとなる。(この間、保存量である質量は 4 桁の精度で保存する)。本研究のシミュレーションで得られた瞬時の質量スペクトルを図 2 に示す。結果は[2]と整合的で、空間スケールを表すインデックス j (j が大きいほど空間スケールは小さい)についてのべき則 j^{-6/5}をしめす(空間次元 3 の場合)。この指数-6/5 は非粘性バーガース方程式のエネルギースペクトルの指数とは異なる。つまり、衝撃波のような不連続点があることから直接的に帰結される指数ではない。

この指数を古典乱流の現象論をつかって理解できるだろうか？

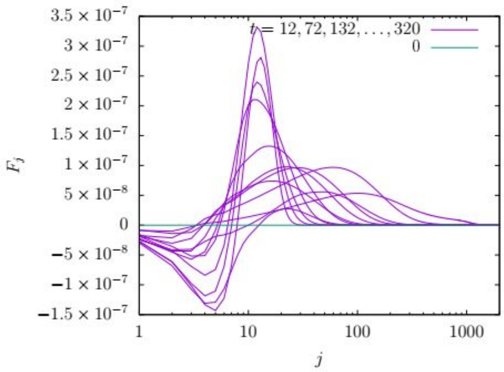

図 3 本研究のシミュレーションで得られた質量流束(複数の時刻のものを示す)。時間の経過とともに、ピークが図の右(小さいスケール)に移動すると同時にピークの幅が広くなることがわかる。この幅が広くなる点が、質量流束のスケール非依存という意味で古典乱流のエネルギーカスケードと類似と考えられる。この質量流束は、質量スペクトルのインデックスが 0 から j までのものの和をとり、その時間微分にマイナスの符号をつけたものである。

図 3 に示すように、古典乱流のデータ解析方法を応用して、異なる空間スケールの間での質量のやりとり(質量流束)を測定すると、ナビエ・ストークス乱流と類似のカスケードが生じていることがわかる。つまり、質量流束を空間スケールインデックスの関数としてプロットすると、インデックスに依存しない一定の領域がある。さらに、この領域は時間と共に増大の傾向にある。もちろん、統計的な定常状態ではないのでこの解釈は万全なものでないが、この数値的結果にもとづいて、ナビエ・ストークス乱流で成功しているコルモゴロフの次元解析を行いたい。しかし、ミ

ニマル系の場合、質量流束とインデックス j だけでは質量スペクトルの次元をつくることができない。時間の次元が必要になるので、ミニマル系の線形分散関係をもちいると、質量スペクトルのべき則が j ^{-1} となる結果が得られる。この指数は近いとはいえ -6/5 = -1.2 との差は大きく、この次元解析は妥当でないと結論する。なお、この指数のずれはナビエ・ストークス乱流でいわれる間欠性(コルモゴロフ次元解析からの組織的なずれ)と解釈することは不可能ではないが、揺らぎの非ガウス性が顕著ではない点で間欠性としての理解の可能性は低いと考える。ここで、ミニマル系の方程式が波動的であることから波動乱流であると仮定してみる。そこで、非線形相互作用(共鳴)の次数を仮定して波動乱流の次元解析を最も単純な仮定の下で応用すると、j の負のべき指数は得られない。従って、波動乱流の次元解析も単純なものでは説明することは出来ない。このように、古典乱流の現象論の単純な応用ではミニマル系の質量スペクトルの指数を定量的に説明することは出来なかった。
その一方で、質量流束の動力学をデータ解析した。図 3 に示したように発展が進むと、質量流束の振幅は時間とともに大きな変化はないが、質量流束の鈍い最大値を与えるスケールのインデックスは大きく変動する。特に、この最大値を与えるインデックスが時間の関数としてどのように振る舞うかをしらべた。これは、非線形性によって誘起される運動がどの程度小さいスケールでおきているか、についての目安を与える。結果、このインデックスは有限の時間で無限大になることが示唆された。このことは、ミニマル系の解が有限時間で無限大になること(特異性の形成)と整合的である。そのインデックス発散の時間にたいする関数型は、無限大になる時刻が明瞭に決定できないため、不確定性を含むが、べき的であることが示唆される。
結論を述べる。このミニマル系の乱流解に古典乱流の方法を応用することで、スケーリング則に関連して決定的に定量的な解決には至らなかった。しかし、保存量のカスケード描像にもとづく解析が有効であることが分かった。この意味では、このアインシュタイン方程式の乱流解は一般的な乱流の描像の範疇にあるものである。この解析手法をさらに進めることで定量的な理解にむすびつくと考えられる。同時に、ナビエ・ストークス乱流とは定性的に異なる、アインシュタイン方程式特有の乱流の物理の発見につながるものと予想される。

<引用文献>
[1] P. Bizon and A. Rostworowski, Wealy turbulent instability of Anti-de Sitter space time, Phys. Rev. Lett., 107 031102 (2011).
[2] M. Maliborski and A. Rostworowski, Lecture notes on turbulent instability of Anti-de Sitter spacetime, Int. J. Mod. Phys. A, 28 1340020 (2013).

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　0　件）

〔学会発表〕（計　2 件）

① 松本剛 「負の宇宙項をもつ 1 次元重力方程式の乱流解析」日本物理学会第７３回年次大会 2018 年
② Takeshi Matsumoto, "Scaling of the skew symmetric velocity increment in helical turbulence", 16th European Turbulence Conferenece 2017 年

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
松本 剛 （MATSUMOTO, Takeshi）
京都大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：２０３４６０７６

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　　）

研究者番号：

(4)研究協力者

（　　　）