3版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　９ 月 １１ 日現在

機関番号： ５２２０１

研究種目： 挑戦的萌芽研究

研究期間： 2016～2018

課題番号： １６Ｋ１４３００

研究課題名（和文）有限変形理論に基づいた弾塑性スペクトル確率有限要素法の開発

研究課題名（英文）Development of Elasto-Plastic Spectral Stochastic Finite Element Method based on Finite Deformation Theory

研究代表者

中川　英則（Nakagawa, Hidenori）

小山工業高等専門学校・一般科・准教授

研究者番号：００３６９９３５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，polynomial chaos展開による応答曲面を用いて不確定解析を行う，スペクトル確率有限要素法(Intrusive SSFEM)の確率弾塑性固体力学問題への適用法について検討している．特に，Intrusive SSFEMとNon-Intrusive Spectral Projection法(NISP法)をカップリングしたNISP-SFEMを開発し，非線形SSFEMの大きな課題の1つである平均値は上手く追えても確率的な変動(分散)を正確に追うことは難しいことへの解決法を見出した．更に，有限変形を伴う平面ひずみおよび3次元の確率弾塑性問題に対してNISP-SFEMの開発を行った．

研究成果の学術的意義や社会的意義
材料特性，境界条件などが正確に分からない状況では，パラメータの不確かさを確率として表現した確率モデルを用いることが手法の１つとして考えられる．確率モデルを効率よく解くための手法としてスペクトル確率有限要素法(Intrusive SSFEM)があるが，確率弾塑性問題への適用はまだ発展途上である．2006年に有限変形確率弾塑性問題を扱った研究がAcharjee,Zabaras氏により発表されたが，確率的な変動を伴う中でのリターンマッピング法など，肝心となる箇所ついては明確にされておらず後追いが難しい状況であった．本研究は，有限変形確率弾塑性問題を扱いながら，応力の更新方法にも切り込んでいる．

研究成果の概要（英文）：The stochastic finite element method (Intrusive SSFEM) is one of tools for efficiently solving models that probabilistically expresses objects whose parameters, such as structure, shape, material characteristics, boundary condition, etc., are not precisely known. In this study, the application of Intrusive SSFEM, which performs uncertainty analysis using response surface by polynomial chaos expansion, to stochastic elasto-plastic solid mechanics problem is considered. In particular, we have developed NISP-SFEM, which is a combination of Intrusive SSFEM and Non-Intrusive Spectral Projection Method(NISP method). As a result, we have found a solution to one of the major problems of nonlinear SSFEM, that it is possible to track the mean value accurately, but it is difficult to accurately track the stochastic fluctuation. Furthermore, the NISP-SFEM for plane strain and three-dimensional stochastic elastic-plastic problems with finite deformation has been developed.

研究分野： 応用力学，計算力学

キーワード： スペクトル確率有限要素法　NISP法　応力リターンマッピング　微小変形問題　有限変形問題　確率弾塑性問題　確率弧長制御法

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

スペクトル確率有限要素法(Intrusive SSFEM)を確率弾塑性問題に初めて適用した例として，微小変形の範囲で bounding medium 理論を用いた Anders, Hori 氏の研究[1)] が挙げられる．その後，扱う問題が正規分布以外の確率分布に発展する中で，Wiener-Askey Polynomial Chaos を用いた研究が Xiu, Karniadakis 氏によって発表された[2)]．そこでは，直交性を持つ多項式確率汎関数(Polynomial Chaos)を構築する際に，重みとして用いた確率密度関数の確率分布に対応した多項式展開を用いることが平均 2 乗収束を得るためにも重要であることが指摘されている．また，初めて有限変形の問題における確率の伝搬を弾塑性の範囲で扱った研究が Acharjee,Zabaras 氏により発表されている[3)]．確率弾塑性問題を扱う場合に，応力のリターンマッピングは克服すべき重要ポイントの１つである．特に陰解法を用いる場合，降伏曲面にマッピングされる応力を決めるためには，その応力による降伏関数の偏導関数が必要となる．すなわち，収束先を決めるためには，その収束先による偏微分の値がどうなっているかを事前に予測しなくては定まらない．しかし降伏関数も応力も確率的に変動するため，その収束先を事前に予測することは難しい問題となる．また，この際に「応力の平均値は上手く追えても，応力の確率的な変動(分散)を正確に追うことは難しい」ことがあげられる．Acharjee, Zabaras 氏による研究[3)]では，平均，分散ともモンテカルロシミュレーションの結果と高精度で一致するものの，応力リターンマッピングについての明確な発表はされていないため詳細が分からず後追いが難しい状況となっている．その後，Sett, Jeremić, Kavvas 氏により，弾塑性に関する確率微分方程式を厳密に解き，それを Intrusive SSFEM に取り込む研究[4)] が行われているが 1 次元問題に留まっている．

２．研究の目的

以上のような背景から，本研究ではまず，非線形 SSFEM の課題の１つである「平均値は上手く追えても確率的な変動(分散)を正確に追うことは難しい」ことへの解決法を見出すことを行う．更に，(1) 微小変形問題の範囲における１次元確率変数を含む弾塑性問題，(2) 微小変形問題の範囲における 2 次元確率変数を含む弾塑性問題，(3) 有限変形を伴う平面ひずみ確率弾塑性問題，(4) 有限変形を伴う 3 次元確率弾塑性問題，における不確定性評価に応用できる手法の開発を行う．

３．研究の方法

(1) NISP 確率有限要素法の開発(微小変形)

応力のリターンマッピングに際して，ばらつきを正確に保てる手法(NISP 確率有限要素法)について検討する．その上で，1 次元確率変数を含む微小変形弾塑性問題に適用し，モンテカルロ法および Stochastic Collocation 法によって得た確率密度関数と比較することで妥当性を示す．

(2) 2 次元確率変数を含む弾塑性問題(微小変形)への適用

2 次元確率変数を含む微小変形弾塑性問題に対して，(1)で開発した NISP 確率有限要素法を拡張する．応力の標準偏差の推移について，Sett, Jeremić 氏は確率微分方程式(Fokker-Planck 方程式)を直接的に解くことで，弾塑性問題の載荷・除荷サイクルにおける応力の確率変動(平均,標準偏差)の推移を厳密に求めることに成功している[5)]．NISP 確率有限要素法でも，載荷・除荷サイクルにおける応力の確率変動(平均,標準偏差)の推移を同様に追えるかを確かめることで，確率が絡む場合の応力のリターンマッピングの構築が正確に行われているかについて検討する．

(3) 有限変形を伴う平面ひずみ確率弾性および弾塑性問題への適用(2 次元問題)

第一段階として，有限変形の弾性問題について，total Lagrange 形式(TL 形式)および updated Lagrange 形式(UL 形式)での NISP 確率有限要素法を構築し，幾何学的非線形問題を解くに当たり，どちらの形式が計算効率や精度の上で適切かを考えてゆく．これは扱う材料構成則が UL 形式に対応しているためであるが，それを TL 形式で等価に行うためには，変形勾配テンソルによる 4 階構成則の変換が必要となる．しかし，ここに確率を導入するとなると，変形勾配テンソルの PC 展開が 4 回掛かることになり，精度的な問題が危惧される．そのため UL 形式を用いたい訳であるが，UL 形式では積分領域そのものが現在配置によるため確率変数となり，正確に確率過程を追えるかが疑問となる．UL 形式，TL 形式の双方の NISP 確率有限要素法を構築し，比較することでこの問題に対応してゆく．第二段階として，2 次元の有限変形確率弾塑性問題について， NISP 確率有限要素法を構築し，塑性安定領域および塑性不安定領域での解析を行う．ここでは，材料物性に与えた確率変動の違いによる影響が，応力の確率変動に精度良く反映されているかをみることで，幾何学的非線形性問題が絡む場合にも応力のリターンマッピングに際して，ばらつきが正確に保てているかを確認する．

(4) 有限変形を伴う 3 次元確率弾塑性問題への適用

NISP 確率有限要素法を三次元有限変形弾塑性問題へ適用し，数値解析を通してその有効性を検討する．(3)と同様に，材料物性に与えた確率変動の違いによる影響が，応力の確率変動に

精度良く反映されているかをみることで，幾何学的非線形性問題が絡む場合にも応力のリターンマッピングに際して，ばらつきが正確に保てているかを確認する．

４．研究成果

(1) NISP 確率有限要素法の開発(微小変形)

非線形な確率有限要素法において，平均値は正確に追うことはできるが，ばらつきを正確に追うことは難しい．そのために，応力のリターンマッピングに際して，ばらつきを正確に保てる手法の開発が，最終目的の達成のためにまず必要となった．微小変形の範囲ではあるが，応力積分に際して NISP 法(Non-Intrusive Spectral Projection Method)を局所的に導入した，NISP 確率有限要素法を開発した．図１の概念図に示すようにヤング率が正規分布にしたがって確率変動する(位置の違いによってもヤング率は相関性を持ちながら変化する)ような 1 次元確率変数を含んだ平面ひずみ弾塑性問題に対して，NISP 確率有限要素法を適用した．

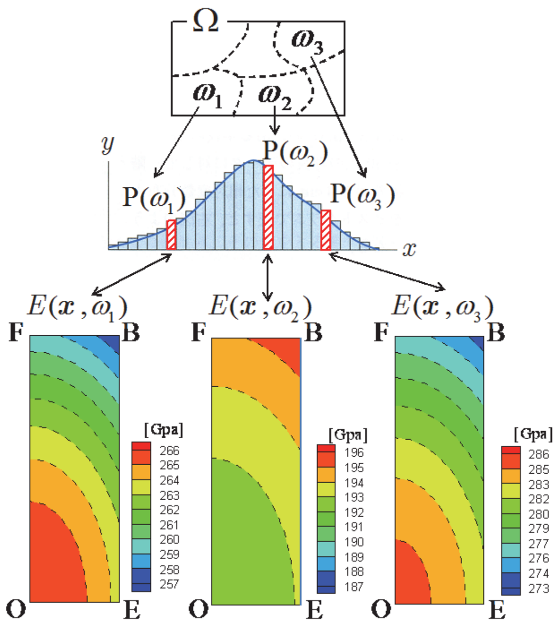

図１　確率変動するヤング率の概念図(正規分布)

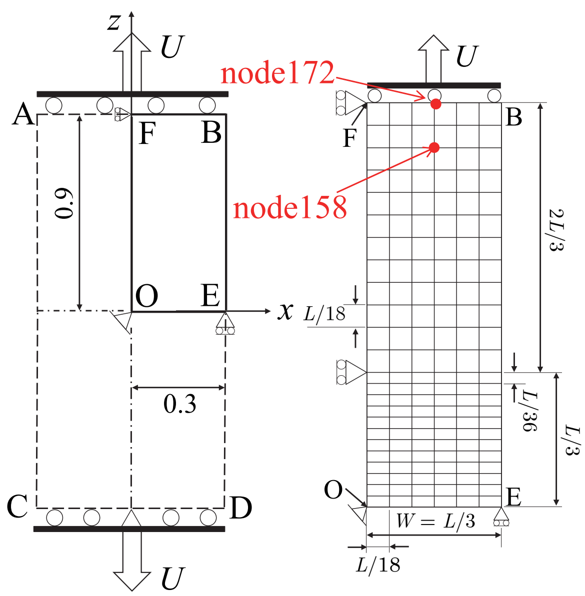

図２　解析モデル

図３および図４は，図２の解析モデルにおける node158 および node172 の位置において得られた水平方向変位(m)の確率密度関数を，モンテカルロ法(MCS)で得た確率密度関数と比較した結果である．図２の解析モデルに示すように，単純引張り平面ひずみ問題ではあるが，ヤング率は相関性を持ちながら位置ごとに変化しているため，与える変位が大きくなるに連れて水平方向変位(m)の確率密度関数は複雑になる．Stochastic Collocation 法によって求めた確率密度関数とも良好な一致を得ている．

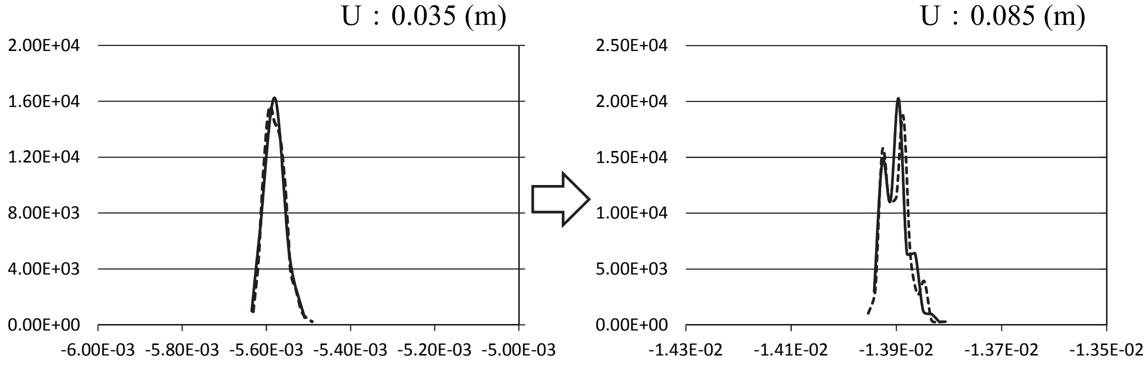

図３水平方向変位(node158)の確率密度関数，縦軸(確率密度)，横軸(変位−単位(m))
実線(NISP 確率有限要素法),破線(MCS)

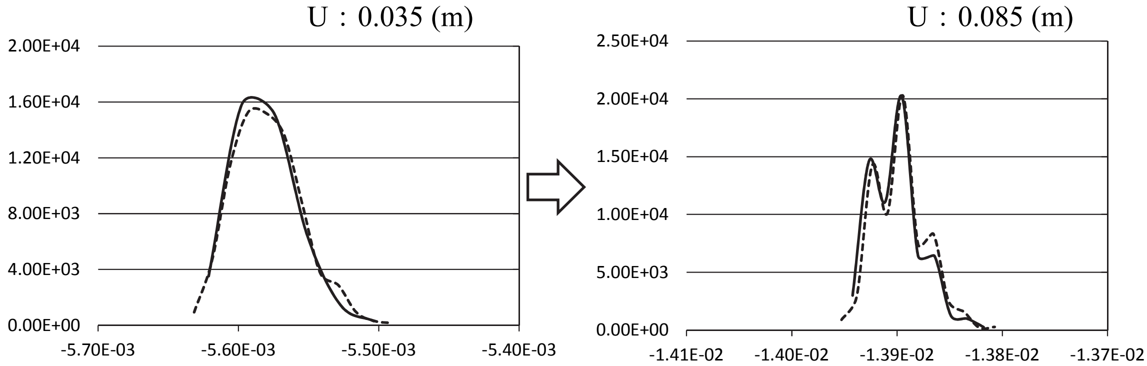

図 4 水平方向変位(node172)の確率密度関数，縦軸（確率密度），横軸（変位−単位（m））
実線(NISP 確率有限要素法),破線(MCS)

(2) 2 次元確率変数を含む弾塑性問題(微小変形)への適用

ヤング率および降伏応力が独立に正規分布にしたがって確率変動するような 2 次元確率変数を含んだ微小変形弾塑性問題に対して，拡張した NISP 確率有限要素法を適用した．応力の標準偏差の推移について，確率微分方程式(Fokker - Planck 方程式)を直接解いた Sett,Jeremić,Kavvas 氏の結果 [5] が発表されている．本研究においては，次式に示すような確率変動をヤング率および降伏応力に与えた．

$$E(\omega)=\overline{E}\left\{1+\sigma_E\cdot\xi_1(\omega)\right\}\quad(-\infty<\xi_1(\omega)<\infty)\quad,\quad f_y(\omega)=\overline{f_y}\left\{1+\sigma_y\cdot\xi_2(\omega)\right\}\quad(-\infty<\xi_2(\omega)<\infty)$$

ここに，$\overline{E}$ はヤング率の平均，$\xi_1(\omega)$ は標準正規確率変数，σ_E はヤング率の変動係数，$\overline{f_y}$ は降伏応力の平均，$\xi_2(\omega)$ は標準正規確率変数，σ_y は降伏応力の変動係数である．

図 5 は，ヤング率の変動係数 σ_E については 20%のばらつきを，降伏応力の変動係数 σ_y については 10%のばらつきをそれぞれ与えた確率モデルにおける応力 σ_{zz} 平均−変位 U 曲線である．図 2 に示す解析モデルにおいて，変位 U を圧縮・引張り方向にそれぞれ与えており，応力の標準偏差(SD)を書き加えている．また，図 6 は，図 5 における応力の SD を終局応力の平均値(577MPa)で除した変動係数(COV)の推移である．Sett,Jeremić,Kavvas 氏が確率微分方程式を解いた結果 [5] によると，本解析モデルでは「初めは弾性域でヤング率の不確定性に依存して COV は増加してゆき，次に降伏し始めると不確定性が降伏応力のばらつきに移行して COV は 10%まで減少する．やがて除荷に移るとヤング率の不確定性に降伏応力の不確定性が足されて COV は 10 % + 20 % 近くまで増加してゆく．それ以降はこのサイクルを繰り返す．」ことになるが，図 6 ではそのサイクルが得られており，このことは，微小変形の枠組みでの NISP 確率有限要素法について，バラつきを正確に保つリターンマッピング法の構築が完成したことを示している．

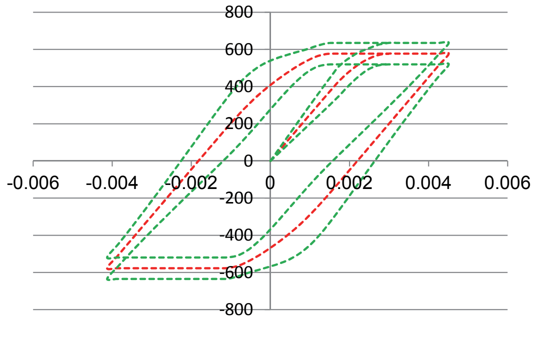

図 5 応力 σ_{zz} 平均−変位 U 曲線　(SD を追加)
横軸:変位 U(m)，縦軸:応力 σ_{zz} (MPa)

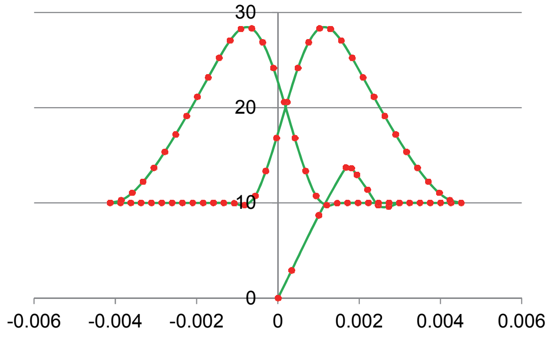

図 6　NISP 確率有限要素法によって得られた応力の変動係数の変化
横軸:変位 U(m) , 縦軸:応力 σ_{zz} の変動係数[%]

(3) 有限変形を伴う平面ひずみ確率弾性および弾塑性問題への適用(2 次元問題)

一段階として，有限変形の弾性問題について，TL 形式および UL 形式での NISP 確率有限要素法を構築し，幾何学的非線形問題を解くに当たり，どの形式が計算効率や精度の上で適切かを検討した．第二段階として 2 次元の有限変形確率弾塑性問題について，UL 形式での NISP

確率有限要素法を構築し，塑性安定領域および塑性不安定領域での解析を行った．同一な形状モデルの単純引張り問題であっても，境界条件が荷重か変位かによって全くの別問題となる．荷重増分の境界条件下では，部材の内力が固定値である境界荷重と釣合いを保とうとするため，降伏応力の確率変動が応力の変動に反映されることはない．そのため，変位増分の境界条件に切り替えて解析を行った．この場合はよく知られているように，不完全系となり解は繰返し計算における数値誤差によって自動的に分岐解に漸近してゆく．本研究の前段階として，荷重増分の境界条件の下で確率を導入しない完全系での解析を行い，分岐経路を得ているが，この完全系の経路に漸近する経路を得る結果となった．また，降伏応力に与えた変動係数の違いによる影響(確率モデルでは，降伏応力に1%および 10%の変動係数を与えている)が，得られた応力の変動係数に精度良く反映されていることが確認された(図７)．このことにより，幾何学的非線形性問題が絡む場合にも応力のリターンマッピングに際して，ばらつきが正確に保てることが示された．

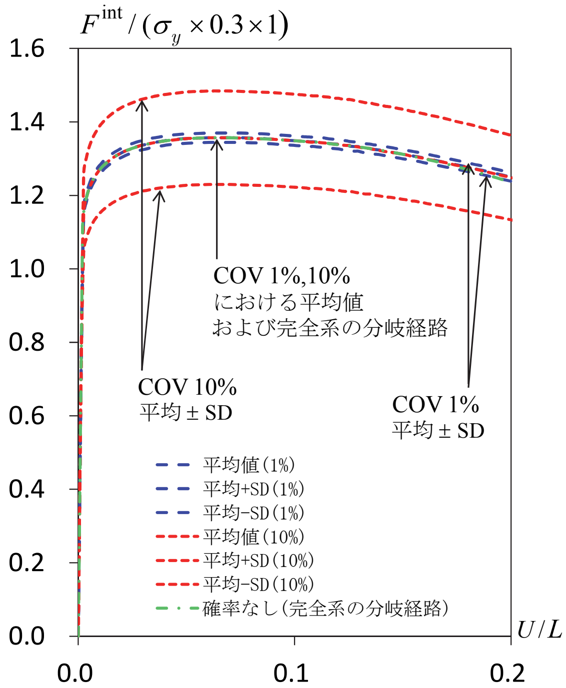

図７ 解析モデル(図２)端辺に働く内力 - 公称ひずみ曲線（変位増分の境界条件の場合, 分岐経路）

(4) 有限変形を伴う 3 次元確率弾塑性問題への適用

NISP 確率有限要素法を三次元有限変形弾塑性問題へ適用し，数値解析を通してその有効性を検討した．変位増分の境界条件での解析を行った．本研究の前段階として，荷重増分の境界条件の下で確率を導入しない完全系での解析を行い分岐経路を得ているが，この完全系の経路に漸近する経路を得る結果となった．また，降伏応力に与えた変動係数の違いによる影響が，応力の変動係数に精度良く反映されることが確認された．

＜引用文献＞

1) Anders, M.S. and Hori, M.: Stochastic finite element method for elasto-plastic body, *Int.J.Num.Meth.Eng.*,Vol. 46, pp.1897-1916,1999.
2) Xiu, D. and Karniadakis, G.E.: The Winer-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations, *SIAM J. Sci. Comput.*,24(2), pp.619-644, 2002.
3) Acharjee, S. and Zabaras, N.: Uncertainty propagation in finite deformations, A spectral stochastic Lagrangian approach, *Comput. Method. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.195, No.19-22, pp.2289-2312, 2006.
4) Sett, K. and Jeremić, B. and Kavvas, M.L.: Stochastic elastic-plastic finite elements, *Comput. Method. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.200, No.9-12, pp.997-1007, 2011.
5) Sett, K. and Jeremić, B.: Stochastic elastic-plastic finite elements, Probabilistic yielding and cyclic behavior of geomaterials, *Int.J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 34, pp.1541-1559, 2010.

５．主な発表論文等(研究代表者には下線)

〔雑誌論文〕（計 3 件）

①中川英則, Total Lagrange 形式に基づく平面ひずみ弾塑性不安定解析，小山工業高等専門学校研究紀要，第 51 号, pp.7-15, 2018.

②中川英則, 1,2 次元確率変数を含む弾塑性問題および有限変形問題への NISP 確率有限要素法の適用，応用力学論文集 Vol.20, pp. I_245-I_254, 2017. (査読有)

③中川英則, 接線剛性行列の構築に NISP アプローチを用いた非線形スペクトル確率有限要素法の基礎的研究，応用力学論文集, Vol. 19, pp.I_167-I_177, 2016. (査読有)

〔学会発表〕（計 8 件）

①NAKAGAWA Hidenori, The role of visualization in mathematics, International Workshop on Mathematical Software's in Educations and Researches, 2018.10.7

②NAKAGAWA Hidenori, Proposal of Nonlinear Spectral Stochastic Finite Element Method with Tangent Stiffness Matrix Constructed by Non-Intrusive Spectral Projection Method, ICMCSSE2018, 2018.9.10

③中川英則, 固体の弾塑性力学問題へのスペクトル確率有限要素法応用, (社)日本計算工学会 不確かさのモデリング・シミュレーション法に関する研究会, 慶應義塾大学理工部 矢上キャンパス(16-A 棟 3 階大会議室), 15:00～15:50 [50 分], 2018 年 8 月 2 日.
④中川英則, NISP 確率有限要素法の有限変形弾塑性問題への適用, 日本計算工学会 第 23 回計算工学講演会, 2018 年 6 月 7 日.
⑤中川英則, 平面ひずみ弾塑性変形問題への有限変形 NISP 確率有限要素法の適用, 土木学会 第 21 回応用力学シンポジウム講演概要集, 2018 年 5 月 19 日.
⑥中川英則, NISP 法を取り込んだ弾塑性スペクトル確率有限要素法の構築とその計算例, 日本計算工学会 第 22 回計算工学講演会, 2017 年 5 月 31 日.
⑦中川英則, 1,2 次元確率変数を含む弾塑性問題および有限変形問題への NISP 確率有限要素法の適用, 土木学会 第 20 回応用力学シンポジウム講演概要集, 2017 年 5 月 20 日.
⑧中川英則, 接線剛性行列の構築に NISP アプローチを用いた非線形スペクトル確率有限要素法の基礎的研究, 土木学会 第 19 回応用力学シンポジウム講演概要集, 2016 年 5 月 21 日.

６．研究組織

(1)研究代表者

研究代表者氏名：中川英則

ローマ字氏名：NAKAGAWA, Hidenori

所属研究機関名：小山工業高等専門学校

部局名：一般科(数学)

職名：准教授

研究者番号（8 桁）：00369935