様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 １８ 日現在

機関番号：１７２０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ１７５５６

研究課題名（和文）一般化岩澤主予想とp-進局所Langlands対応

研究課題名（英文）Generalized Iwasawa main conjecture and p-adic local Langland correspondence

研究代表者
中村　健太郎（Nakamura, Kentaro）

佐賀大学・理工学部・准教授

研究者番号：９０５９５９９３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：整数論において重要な問題である岩澤主予想に対して、p進局所Langlands対応という現在発展中の新しい理論を用いてアプローチをするという研究を行った。その結果、２つの理論の間に当初思い描いていたよりもはるかに緊密な繋がりがあることを発見することができた。特に、岩澤主予想の一般化に関する加藤和也氏の一連の予想（一般化岩澤主予想、局所および大域イプシロン予想）が、p進局所Langlands対応における様々な深い定理と密接な関係を持つことを発見し、さらには、この繋がりを用いて加藤氏の予想のいくつかを証明することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
p進局所Langlands対応は現在発展中の理論であり、この分野の進展は整数論の問題への応用という見地からも興味深い。KisinとEmertonは、この理論をGalois表現の保型性（Fontaine-Mazur予想）へ応用し、p進局所Langlands対応の整数論における重要性を決定的なものにした。Galois表現の保型性と並んで重要な岩澤主予想との深い繋がりを発見した本研究は、p進局所Langlands対応の重要性をさらに補強する結果であり、今後はGalois表現の保型性と岩澤主予想およびp進局所Langlands対応が渾然一体となった壮大な理論が産まれることを期待している。

研究成果の概要（英文）：I found a deep relationship between the Iwasawa main conjecture and the p-adic local Langlands correspondence. In particular, I found a deep relationship between Kato's very deep conjectures
(generalized Iwasawa main conjecture, local and global epsilon conjecture) and the p-adic local Langland correspondence. As a result, I could prove some important parts of his conjecture using this relationship.

研究分野：整数論

キーワード：岩澤主予想　p進局所ラングランズ対応　p進ガロア表現　オイラー系　（φ、Γ）加群

１．研究開始当初の背景

９０年代にWilesによって有理数体Q上の楕円曲線の志村谷山予想が解決されたことは近年の整数論の流れを決定付けた重要な出来事である。BreuilはWilesの結果の一般化を目指す一連の研究において、局所ラングランズ対応のp進版の存在を予見し、p進局所ラングランズ対応と呼ぶべき対応が存在するであろうと予想した。その後、Colmezによる(φ,　Γ)加群を用いた対応の構成という時代を画する研究がなされ、Colmezに続く多くの研究者の様々な重要な結果により2010年代中頃にはGL_2(Q_p)のp進局所Langlands対応が完全な形で解決されるに至った。また、Breuilの当初の目論見（Wilesの結果の一般化）もKisin，Emertonにより実現され、Wilesの結果の膨大な一般化である（有理数体の絶対Galois群の）階数２のGalois表現に対するFontaine-Mazur予想がほぼ一般的な形で解決された。これらは主に2010年代前半の出来事であるが、私は彼らの結果に触発され、GL_2(Q_p)のp進局所Langlands対応のさらなる整数論への応用を目指した研究に取り組んでいた。中でも、階数2の局所イプシロン予想への応用（下記引用文献）は私にとって大きな結果であり、本研究の方向性を決定付けるものになっている。局所イプシロン予想とは、９０年代に加藤和也氏によって、岩澤主予想の一般化に関する一連の研究の中で提唱された予想群の中の１つである。これらは岩澤主予想の一般化、特に、モチーフに付随するゼータ関数の代数的な対応物（ゼータ元）の存在に関わるものであり、ゼータ元の存在に関する一般化岩澤主予想、ゼータ元の満たす関数等式に関する局所および大域イプシロン予想という予想からなる。上記引用文献では、GL_2(Q_p)のp進局所Langlands対応における様々な重要な定理を駆使することで、階数２の局所p進ガロア表現の普遍的な族に対して、局所イプシロン因子の代数的な対応物である局所イプシロン同型と呼ばれるものが存在することを証明した。また、この結果の応用として、Hecek固有な尖点的楕円保型形式fに付随するp進Galois表現に対して加藤和也氏が定義したゼータ元が我々の構成した局所イプシロン同型を局所因子とする関数等式を満たすことを証明した（fに付随するGalois表現に対する大域イプシロン予想の解決）。

＜引用文献＞

K. Nakamura, Local epsilon isomorphisms for rank two p-adic representations of Gal(Q_p/Q_p) and a functional equation of Kato’s Euler system, Cambridge Journal of Math, vol 5 (2017) No 3, 281-368.

２．研究の目的

局所イプシロン予想は一般化岩澤主予想の局所版とみなせるべきものである。この予想がp進局所p進Langlands対応と密接に関係を持つという発見の次に来るステップとして、これらの関係の大域版を発見することを研究の主目的と定めた。つまり一般化岩澤主予想と大域p進Langlands対応との関係を発見すること、さらには、この関係性を用いて一般化岩澤主予想に関する結果を得ることを研究の目的と定めた。ここで、GL_2(Q)の大域p進Langlands対応とは、モジュラー曲線の完備コホモロジーによるp進Langlands対応の幾何的実現の理論（Emerton）のことである。一方、GL_2(Q)の一般化岩澤主予想として残されている大きな問題は（有理数体の絶対Galois群の）階数２の（p進的な）普遍Galois変形に関するゼータ元の存在である。そこで、Emertonの理論を用いた普遍Galois変形に関するゼータ元の構成を研究の主目的と定めた。

３．研究の方法

加藤和也氏は、保型形式fに付随する階数２のGalois表現に対して、モジュラー曲線の幾何を用いてゼータ元を構成した。一方、Emertonの定理により、階数２の普遍Galois変形は、モジュラー曲線の完備コホモロジーからGL_2(Q_p)のp進局所Langlands対応を用いて抽出することができることが知られていた。そこで私は、加藤氏のゼータ元の構成をモジュラー曲線の完備コホモロジーの観点から再解釈することで、階数２の普遍Galois変形に関するゼータ元を構成することができないかと考えた。まず、加藤氏のゼータ元の構成および最近の深谷-加藤氏によるモジュラー曲線に対するゼータ元の構成によって、モジュラー曲線の完備コホモロジーに対してゼータ元と呼ぶべきものを定義することができる。ここからいかにして階数２の普遍Galois変形の部分を抽出するかという点が我々の研究の本質的な部分となる。モジュラー曲線の完備コホモロジーは有理数体の絶対Galois群およびGL_2(Q_l)（lは素数）たちが作用する巨大な空間であり、普遍Galois変形の部分を取り出すためには、GL_2(Q_l)（lは素数）たちの作用する巨大な部分を取り除く必要がある。我々の研究において最も重要なのはGL_2(Q_p)の作用する部分を取り除くステップである。このステップでは、GL_2(Q_p)のp進局所Langlands対応において、Clomezの理論と並んで重要なPaskunasの理論を用いた。一方、pと異なる素数lに対するGL_2(Q_l)の作用する部分を取り除くステップにおいては、GL_(Q_l)の局所Langlands対応のp進族版に関するEmerton-Helmの理論を用いた。これらによって、階数２の普遍Galois変形に対するゼータ元が構成できるのであるが、最後に残された問題は、我々のゼータ元と加藤氏のゼータ元との比較である。つまり、我々の構成したゼータ元を、保型形式fに付随するp進Galois表現へ

特殊化した時に、加藤氏の構成したゼータ元と一致することを示す必要がある。このステップは、分岐条件とHodge-Tate条件を固定した普遍変形環をGL_2(Q_p)の表現の圏を用いて構成するPaskunasの結果が必要になる。結局、普遍変形Galois変形のゼータ元の構成においても、Emertonの結果のみならずp進Langlands対応における様々な主定理が当初思い描いていたよりもはるかに緊密な仕方で本質的に関わってくることがわかった。

４．研究成果

階数２の普遍ガロア変形に対してゼータ元を構成し、これと加藤氏のゼータ元との比較もすることができた。また、まだ細部は確認していないが、前研究の一般化として、我々の構成したゼータ元の関数等式も示すことができるはずであり、これによって階数２の場合の大域イプシロン予想は（ほぼ）解決されることになるはずである。以上の結果を早急に論文にまとめることが喫緊の課題である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計２件）

（１）K. Nakamura, Local epsilon isomorphisms for rank two p-adic representations of Gal(¥bar{Q}$_p$/Q$_p$) and a functional equation of Kato's Euler system, Cambridge Journal of Math, vol 5 (2017) No 3, 281-368. (査読有)

（２）K. Nakamura, The local and global ε-conjectures for the rank two case, RIMS Kokyuroku Bessatsu Algebraic Number Theory and Related Topics 2014 (査読有)

〔学会発表〕（計　１０　件）

（１）中村　健太郎, 階数2の普遍ガロア変形に対するゼータ同型の構成について, 2018 年 11 月, 代数的整数論とその周辺, RIMS.
（２）中村　健太郎, Euler system for rank two universal deformation, 2018 年 011 月, p-adic cohomology and arithmetic geometry, 東北大学.
（３）中村　健太郎, Euler system for rank two universal deformation, 2018 年 05 月, Iwasawa Theory and Related Topics, University of Heidelberg.
（４）中村　健太郎, p 進局所ラングランズ対応と岩澤主予想, 2017 年 09 月, 2017 年度日本数学 会秋季総合分科会 企画特別講演
（５）中村　健太郎, 階数2の普遍ガロア変形に対するゼータ同型の構成に向けて, 2017 年 09 月, Regulators in Niseko 2017, ヒルトンニセコビレッジ
（６）中村　健太郎, A construction of local epsilon-isomorphisms using Colmez's multiplicative convolution, 2017 年 06 月, p-adic Hodge Theory and Automorphic Forms, Beijing international center for mathematical research.
（７）中村　健太郎, A construction of local epsilon isomorphisms using Colmez's multiplicative convolution, 2016 年 09 月, 第三回日台整数論研究集会, 台北.
（８）中村　健太郎, A construction of local epsilon isomorphisms using Colmez's multiplicative convolution, 2016 年 07 月, Pan Asia Number Theory Conference 2016, 台湾.
（９）中村　健太郎, A construction of local epsilon isomorphisms using Colmez 's multiplicative convolution, 2016 年 07 月, p 進コホモロジーと数論幾何学, 東京電機大学.
（１０）中村　健太郎, A construction of localepsilon isomorphisms using Colmez's multiplicative convolution, 2016年5月, Hakodate workshop on arithmetic geometry 2016, 函館.

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：

権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：
部局名：
職名：
研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。