

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 6 月 16 日現在

機関番号：34420

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17559

研究課題名(和文) アラケロフ幾何における正値性

研究課題名(英文) Positivity in Arakelov Geometry

研究代表者

生駒 英晃 (Ikoma, Hideaki)

四天王寺大学・教育学部・講師

研究者番号：90533638

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：アラケロフ幾何学では、代数多様体上の有理点の高さをシステムティックに扱うために、アデールのグリーン関数の与えられたカルティエ因子(アデール因子)を考えます。アデール因子が与えられると、代数幾何学で直線束と曲線の交点数を考えるのと同様に、アデール因子と代数点の数論的交点数を考えることによって、代数点の高さが定義されます。このような高さ関数の性質はアデール因子の正値性(数論的体積)と深く関わっています。本研究では、新たに、「アデール因子と基底条件の組」の概念を導入し、このような組に付随する数論的体積関数が、アデール因子方向にも基底条件方向にも微分可能であることを示しました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数方程式系の有理数解の研究は、数学において最も長い歴史を分野の1つであり、大変難しいテーマの1つです。アラケロフ幾何学は、代数多様体上の有理点の構造を調べるため、このような点の高さをシステムティックに定義する方法を与えてくれます。このような高さ関数の性質を調べるには、考えているアデール因子の数論的体積を調べることが有効ですが、これは計算するのも極めて困難であることが知られています。本研究は、アデール因子の数論的体積の性質をより精緻に調べる手段を与えるため、基底条件の概念とそれに沿った数論的体積関数の微分可能性を確立しました。これらは今後、有理点の分布の問題などに応用されると期待されます。

研究成果の概要(英文)：In Arakelov geometry, we consider Cartier divisors endowed with adelic Green functions (i.e. adelic Cartier divisors) in order to define systematically the heights of algebraic points on an algebraic variety. Given such an adelic Cartier divisor, we can define the height of an algebraic point as the arithmetic intersection number of the adelic Cartier divisor and the algebraic point, which is similar to the usual intersection number defined for a Cartier divisor and a curve on an algebraic variety. The properties of such a height function are closely related to the positivity properties of the given adelic Cartier divisor. In this research, we introduce a new notion; a "pair of an adelic Cartier divisor and a base condition". We prove that the arithmetic volume function defined on the cone of big pairs is differentiable along the directions both of adelic Cartier divisors and of base conditions.

研究分野：代数幾何学

キーワード：アラケロフ幾何学 アデール因子 基底条件 数論的体積 代数幾何学 ニュートン・オコンコフ凸体 代数多様体上の有理点

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 文献において、Yuan が数論的 Siu 不等式を確立しました。その結果として、Chen は、巨大なアデル因子のなす錐の上で、数論的体積関数がアデル因子方向に Gateaux 微分可能でありその微分係数が数論的正値交点数で与えられることを示しました(文献)。さらに、Yuan の数論的 Siu 不等式により、巨大なアデル因子に対して、高さの小さい代数点の同程度分布定理の成立することが示され、数論的力学系の問題や代数多様体上の代数点の分布の問題に応用されました。

(2) 私は文献において、アデル的直線束に対する適切な数論的制限体積の定義を考察し、それに対して数論的藤田近似定理が成立することを示しました。文献の研究は、代数幾何学における体積関数と制限体積の関係と同様に、数論的体積関数の微分係数として数論的制限体積が現れることを期待して行ったものでした。

(3) 私は以上の背景のもとで、「アデル因子と基底条件の組」を考え、それに付随する数論的体積関数の基底条件方向の Gateaux 微分を考えると、それが組の数論的制限体積と一致するだろうと考えました。さらに、このような微分可能性の確立によって、数論的ニュートン・オコンコフ凸体の形状の解明や、数論的正値性についての未解決問題、代数多様体上の代数点の分布の問題に応用できると考えました。

2. 研究の目的

(1) アラケロフ幾何学において、新たに「アデル因子と基底条件の組」の概念を導入し、それに付随する数論的体積や数論的制限体積の性質から、数論的正値性の従来よりもより精緻な性質を明らかにすることです。特に、組に付随する数論的体積関数が基底条件に沿って微分可能であり、巨大な組のなす錐の内部においてはその両側微分係数が、錐の境界においてはその片側微分係数が、それぞれ数論的制限体積に一致することを示すことです。

(2) 上述の数論的体積関数の微分可能性の結果は、数論的ニュートン・オコンコフ凸体の形状解明に役立つと期待され、また、数論的正値性についての未解決問題や代数多様体上の代数点の分布の解明に応用されると期待されます。

3. 研究の方法

(1) まず、「アデル因子と基底条件の組」の概念を導入し、その双有理性を明らかにします。組に付随する数論的体積関数が、組の空間上大域的に連続であること、さらに、数論的体積関数が、巨大な組においてアデル因子の方向に Gateaux 微分可能であって微分係数が数論的正値交点数に一致することを確立します。

(2) 次に、組の数論的制限体積の適切な定義を見つけ、数論的体積関数の基底条件方向の片側微分係数が組の数論的制限体積に一致することを確立します。このことから、数論的ニュートン・オコンコフ凸体の断面積が数論的制限体積で与えられることがわかり、組の数論的体積がアデル因子の数論的ニュートン・オコンコフ凸体の切断の体積に一致することが従います。

4. 研究成果

(1) 文献において、「アデル因子と基底条件の組」の概念を導入しました。組に対して定義された数論的体積関数が、巨大な組のなす錐の上で、アデル因子方向に Gateaux 微分可能であり、その微分係数が数論的正値交点数に一致することを示しました。さらにその応用として、組の数論的 Bonnesen-Diskant の不等式を証明しました。

(2) 文献において、「アデル因子と基底条件の組」に対して定義された数論的体積関数が、組の空間上で大域的に連続であることを示しました。また、アデル因子の概念を ℓ^1 ノルムで完備化して、 ℓ^1 アデル因子の概念を導入しました。

(3) 文献において、Hilbert の第 14 問題の弱いバージョンに対して、肯定的な結果を与えました。特に、次数付き線型系が部分有限型であることは、考えている関数体の取り方によらないことが従います。この結果によって、Lazarsfeld-Mustata と Kaveh-Khovanskii によるニュートン・オコンコフ凸体の構成の、初等的な手法による一般化を与えることができます。Kaveh-Khovanskii の元々の構成方法では、関数体が基礎体上良い付値をもつこと(例えば、基礎体が

代数閉体の場合)が本質的でしたが、私たちの方法ではこの条件を自然に外すことができます。

(4) 文献において、「アデール因子と基底条件の組」に対して数論的制限体積(あるいは、数論的制限正值交点数)を定義しました。さらに、局所的に巨大な組のなす錐の内部において、数論的体積関数は基底条件方向に Gateaux 微分可能であり、その両側微分係数が数論的制限正值交点数で与えられることを証明しました。

<引用文献>

Huayi Chen, Differentiability of the arithmetic volume function, *Journal of the London Mathematical Society* (2), 84(2) (2011), 365-384.

Huayi Chen and Hideaki Ikoma, On subfiniteness of graded linear series, *European Journal of Mathematics*, 6(2) (2020), 367-399.

Hideaki Ikoma, Remarks on arithmetic restricted volumes and arithmetic base loci, *Publications of the RIMS* 52 (2016), 435-495.

Hideaki Ikoma, Adelic Cartier divisors with base conditions and the Bonnesen-Diskant-type inequalities, to appear in *Tohoku Mathematical Journal*.

Hideaki Ikoma, Adelic Cartier divisors with base conditions and the continuity of volumes, to appear in *Kyoto Journal of Mathematics*.

Hideaki Ikoma, Differentiability of the arithmetic volume function along the base conditions, preprint available at <http://arxiv.org/abs/1807.11680>.

Xinyi Yuan, Big line bundles over arithmetic varieties, *Inventiones Mathematicae*, 173(3) (2007), 603-649.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Chen Huayi、Ikoma Hideaki	4. 巻 6
2. 論文標題 On subfiniteness of graded linear series	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 367-399
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40879-019-00349-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Hideaki Ikoma	4. 巻 -
2. 論文標題 Adelic Cartier divisors with base conditions and the continuity of volumes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hideaki Ikoma	4. 巻 -
2. 論文標題 Adelic Cartier divisors with base conditions and the Bonnesen-Diskant-type inequalities	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hideaki Ikoma	4. 巻 52
2. 論文標題 Remarks on the arithmetic restricted volumes and the arithmetic base loci	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 435-495
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/PRIMS/187	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

[学会発表] 計13件(うち招待講演 5件/うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Hideaki Ikoma
2. 発表標題 Differentiability of the arithmetic volume function along the base conditions
3. 学会等名 Geometry of arithmetic varieties, Beijing (BICMR) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hideaki Ikoma
2. 発表標題 Differentiability of the arithmetic volume function along the base conditions
3. 学会等名 Intercity Arakelov Seminar 2019, Kyoto (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hideaki Ikoma
2. 発表標題 Differentiability of the arithmetic volume function along the base conditions
3. 学会等名 Seminaire de theorie des nombres (IMJ-PRG) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 生駒英晃
2. 発表標題 On the differentiability of arithmetic volume function
3. 学会等名 京都大学代数幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 生駒英晃
2. 発表標題 On the differentiability of arithmetic volume function
3. 学会等名 代数的整数論とその周辺2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 生駒英晃
2. 発表標題 Adelic Cartier divisors with base conditions and the Bonnesen-Diskant-type inequalities
3. 学会等名 第16回広島仙台整数論集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 生駒英晃
2. 発表標題 Adelic Cartier divisors with base conditions and the Bonnesen-Diskant-type inequalities
3. 学会等名 第11回福岡数論研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 生駒英晃
2. 発表標題 Adelic Cartier divisors with base conditions and the Bonnesen-Diskant-type inequalities
3. 学会等名 Intercity Seminar on Arakelov Theory (CNU Beijing) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 生駒英晃
2. 発表標題 On the concavity of the arithmetic volumes (poster)
3. 学会等名 日本数学会 異分野・異業種研究交流会 2017
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hideaki Ikoma
2. 発表標題 On the differentiability of arithmetic volumes and the Bonnesen-Diskant-type inequalities
3. 学会等名 東京理科大学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hideaki Ikoma
2. 発表標題 On an arithmetic analogue of the Bonnesen-Diskant inequality
3. 学会等名 第4回 K3曲面・エンリケス曲面ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hideaki Ikoma
2. 発表標題 Adelic Cartier divisors with base conditions and the Bonnesen-Diskant-type inequalities
3. 学会等名 Kickoff Symposium: New development of algebraic geometry viewed from theoretical physics (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hideaki Ikoma
2. 発表標題 Adelic Cartier divisors with base conditions and the Bonnesen-Diskant-type inequalities
3. 学会等名 Number Theory Seminar
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 川口 周、森脇 淳、生駒 英晃	4. 発行年 2017年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 186
3. 書名 モデル ファルティングスの定理 : ディオファントス幾何からの完全証明	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----