

令和 2 年 6 月 4 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17565

研究課題名(和文)量子変形カレント代数の表現論

研究課題名(英文)Representation theory of quantum deformed current algebras

研究代表者

和田 堅太郎(Wada, Kentaro)

信州大学・学術研究院理学系・准教授

研究者番号：60583862

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：量子変形カレント代数の構造と表現論について研究した。量子変形カレント代数の構造について以下のことを得た。量子カレント代数は量子ループ代数のホップ部分代数であり、量子変形カレント代数は量子カレント代数の余イデアル部分代数である。このことより、量子変形カレント代数の加群圏は量子カレント代数の加群圏(これはテンソル圏となる)上の加群圏となる。また、この構造を見つける過程で、量子カレント代数が、Finkelberg-Tsymbaliuk によって導入されたシフト量子アフィン代数の部分代数となっていることも発見した。上記の構造を用いて、量子変形カレント代数の有限次元既約表現の分類も行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子変形カレント代数は、巡回  $q$ -Schur 代数の表現論を動機として、研究代表者によって導入された代数であるが、今回の研究によって、その"量子群"としての構造が明らかになったことによって、巡回  $q$ -Schur 代数の表現論や関連する表現論も含め、今後多くの応用が期待できる。また、数理物理に現れるクーロン枝の数学的な定式化に関連して導入された、シフト量子アフィン代数との関係も発見できたことは重要な成果である。

研究成果の概要(英文)：We studied on some structures and representations of quantum deformed current algebras.

We obtained the following results on structures of quantum deformed current algebras. The quantum current algebra is a Hopf subalgebra of a quantum loop algebra, and the quantum deformed current algebra is a coideal subalgebra of the quantum current algebra. These imply that the module category of the quantum deformed current algebra is a module category over the module category of the quantum current algebra which is a tensor category. We also found that the quantum deformed current algebra is a subalgebra of a shifted quantum affine algebra introduced by Finkelberg-Tsymbaliuk. We also classify the isomorphism classes of finite dimensional simple modules of quantum deformed current algebras.

研究分野：数学(代数学, 表現論)

キーワード：表現論 量子群 リー代数  $q$ -Schur 代数 Hecke 代数

## 1. 研究開始当初の背景

本研究の対象である量子変形カレント代数は、巡回  $q$ -Schur 代数の表現論を通じて、研究代表者によって導入された代数である。

巡回  $q$ -Schur 代数は、古典的な  $q$ -Schur 代数を一般化したものである。古典的な  $q$ -Schur 代数は一般線型リー代数に付随した量子群の商代数になっていることが知られていて、 $q$ -Schur 代数の表現と一般線形リー代数に付随した量子群の多項式表現を考えることは同じことであることが分かる。

量子群はホップ代数の構造を持っていて、その加群圏は組み紐テンソル圏の構造を持つことが知られており、その表現論においてもテンソル圏としての構造は重要な役割を果たす。また、組み紐テンソル圏としての構造が、トポロジーや数理物理などの他分野への多くの応用を与えることも知られている。

一方で、 $q$ -Schur 代数の表現論 (一般線型リー代数に付随した量子群の表現論) は、一般線型群の古典的な表現論に現れる組合せ論を一般化したものを用いて、組合せ論による様々な記述も知られている。巡回  $q$ -Schur 代数の表現論は主に、古典的な  $q$ -Schur 代数の表現論に現れる組合せ論を一般化したものを用いて研究されてきた。

巡回  $q$ -Schur 代数の表現論の組合せ論を用いた様々な結果に加え、近年、アフィンリー代数の放物型圏  $\mathcal{O}$  や有理 Cherednik 代数の表現論との関係も指摘され、巡回  $q$ -Schur 代数の表現論の背後にも“量子群”の構造が存在していることが期待されるようになった。

その“量子群”を記述したものとして、量子変形カレント代数が導入されたが、研究開始当初の段階では、その代数は、量子群によく似た生成元と基本関係式によって定義されているだけで、その“量子群”としての構造については何も分かっていなかった。

## 2. 研究の目的

量子変形カレント代数の“量子群”としての構造を明らかにするとともに、その表現論の基礎付けを行い、巡回  $q$ -Schur 代数を含む関連する代数の表現論との関係を探る。

## 3. 研究の方法

関連する先行研究の文献を調べる、研究集会等に参加して情報収集を行う、研究協力者と議論を行うなど、通常の数学の研究で行われている方法を用いる。

## 4. 研究成果

量子変形カレント代数の構造について、研究開始当初は、量子変形カレント代数自身がホップ代数としての構造を持つことを期待していたが、おそらく、量子変形カレント代数自身は余積を持たないであろうことが分かった。その代わりに、以下の構造を見つけることができた。

まず、量子カレント代数(カレントリー代数の普遍包絡代数の  $q$ -類似)は、量子ループ代数のホップ部分代数となっている。さらに、量子変形カレント代数は、量子カレント代数の余イデアル部分代数となっている。このことにより、量子変形カレント代数の表現と量子カレント代数の表現に対しテンソル積表現 (量子変形カレント代数の表現となる) を考えることができ、この意味で、量子変形カレント代数の加群圏は“テンソル圏”の構造を持つ (正確には、量子カレント代数はホップ代数なので、その加群圏はテンソル圏の構造を持ち、量子変形カレント代数の加群圏は量子カレント代数の加群圏(テンソル圏)上の加群圏となる)。

上記の構造を見つける際に、量子カレント代数がシフト量子アフィン代数の部分代数になっていることを用いた。シフト量子アフィン代数は、数理物理に現れるクーロン枝の数学的な定式化に関連して、最近 Finkelberg-Tsybaľiuk によって導入された代数であり、その表現論自体はまだあまり調べられていないが、重要であると思われる。量子変形カレント代数の表現論がシフト量子アフィン代数の表現論の一部を含んでいることを発見できたことは、今後の研究も含めて意義があると思われる。

さらに、上記の量子変形カレント代数の“テンソル圏”としての構造を利用して、量子変形カレント代数の有限次元既約表現の分類を行った。この分類は、量子ループ代数やヤンギアン、シフトヤンギアン等の既に知られていた有限次元既約表現の分類の自然な一般化であるが、その過程で、有限次元既約表現を特徴付ける最高ウェイトを、対称多項式を用いて具体的に記述することができた。通常、量子ループ代数の有限次元既約表現の最高ウェイトは、母関数の形で表示される。分類の議論自体に本質的な違いはないが、対称多項式を用いて(母関数の形ではなく)具体的に記述したことによって、母関数表示と合わせて、今後の研究に役立つと思われる。

なお、量子変形カレント代数という呼び方は誤解を招く恐れがあるため、 $(q, Q)$ -カレント代数と呼ぶことにした。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Wada Kentaro	4. 巻 501
2. 論文標題 Finite dimensional simple modules of deformed current Lie algebras	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 1~43
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2018.01.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kentaro Wada	4. 巻 52
2. 論文標題 New Realization of Cyclotomic $q$ -Schur Algebras	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Publ. RIMS Kyoto Univ.	6. 最初と最後の頁 497-555
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/PRIMS/188	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 和田堅太郎
2. 発表標題 Finite dimensional simple modules of $(q,Q)$ -current algebras
3. 学会等名 Algebraic Lie Theory and Representation Theory
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 和田堅太郎
2. 発表標題 $(q,Q)$ -カレント代数の有限次元既約表現
3. 学会等名 組合せ論的表現論の諸相（RIMS共同研究）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kentaro Wada
2. 発表標題 Mackey's formulas for cyclotomic Hecke algebras and the category 0 of rational Cherednik algebras of type $G(r, 1, n)$
3. 学会等名 Conference on Algebraic Representation Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 和田堅太郎
2. 発表標題 Finite dimensional simple modules of deformed current Lie algebras
3. 学会等名 第2回Algebraic Lie Theory and Representation Theory
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kentaro Wada
2. 発表標題 Finite dimensional simple modules of deformed current Lie algebras
3. 学会等名 Conference on Algebraic Representation Theory (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----