

令和元年6月12日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17567

研究課題名(和文)スーパー量子群と数理物理への応用

研究課題名(英文) Super quantum groups and its applications for mathematical physics

研究代表者

松本 拓也 (Matsumoto, Takuya)

名古屋大学・高等研究院(多元)・特任助教

研究者番号：50748803

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：正の有理レベルにおける2次元共形場理論の代数構造について、その半単純ではないヴィラソロ加群の構造を調べることを目的として研究を行った。研究方法としては、自由場表示を用いたスクリーニング作用素と、ヴィラソロ加群の離散変数環上へ持ち上げるを用いた。結果として、スクリーニング作用素は正の有理レベルでは、フェルダー複体と呼ばれる複体をなし、そのコホモロジーとしてBelavin, Polyakov, Zamolodchikovらのいわゆるミニマル模型が定義されるが、離散変数環上から複素数体上への極限として、スクリーニング作用素の非自明の因子化を得ることが出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

2次元共形場理論は、素粒子物理学や物性物理学に多くの応用を持つだけでなく、数学的にも多くの重要な概念を有機的に結びつける役割を果たす、重要な研究対象である。特に、Belavin, Polyakov, Zamolodchikovらのミニマル模型はその最も基本的な模型であるが、その表現圏をヴィラソロ加群として半単純でない場合を考察することは、重要な一般化である。本研究では、自由場表示と離散変数環上への加群の持ち上げを主な手がかりとして、スクリーニング作用素の因子化を観測することが出来た点において、今後の展開への重要な足がかりを得ることが出来たと考えている。

研究成果の概要(英文)：We have studied the algebraic structure of the two-dimensional conformal field theory at positive rational levels. Especially, our purpose is to investigate the structure of the non-semisimple Virasoro modules. As strategy of the research, we adopted the free field realization of the screening operators and the lifting of the Virasoro modules over the discrete variation ring. As a result, we have obtained the non-trivial factorization of the screening operators by a reduction of those from the discrete variation rings, while it is known that the screening operators at the positive rational levels define so called the Felder complex and Belavin, Polyakov, and Zamolodchikov's minimal models are characterized by the cohomology.

研究分野：数理物理学

キーワード：共形場理論 対称多項式 量子群 リースーパー代数 可積分系

1. 研究開始当初の背景

本研究課題「スーパー量子群と数理論物理への応用」は 2016 年度より採択された。量子群は 1985 年にドリinfeldと神保により独立に導入された代数構造であり、リー代数の普遍展開環の変形として定義される。一方で、カッツは素粒子理論などで研究が進んでいた超対称性の概念をリー環の枠内で一般的に扱ってリースーパー代数を定義し、さらにその分類を行った。本研究課題での「スーパー量子群」とは、リースーパー代数に付随して定義される量子群のことをいう。

このようなスーパー量子群は、素粒子物理学における超弦理論や、物性物理学における可解模型、また両者にまたがって広い応用を持つ 2 次元共形場理論などで重要な役割を果たす。

本研究は、一般の量子群比べ、その数学的研究が遅れていたスーパー量子群の理論を整備するとともに、その数理論物理の諸相への応用を目指したものであった。具体的な研究対象としては、超弦理論におけるゲージ/重力対応の可積分構造を深い関わりのあるリースーパー代数 $sl(2|2)$ とそれに付随する量子群の研究、また量子群の知見を活かした非線形シグマ模型の可積分変形の理論、また 2 次元共形場理論の基礎的な研究に取り組むこととした。

2. 研究の目的

研究の目的は、スーパー量子群の数学的基礎を整備すると共に、数理論物理への具体的ないくつかの問題への応用である。特に多くの時間を充てたテーマは、正の有理レベルにおける 2 次元共形場理論に関するものである。2 次元共形場理論は、1984 年の Belavin, Polyakov および Zamolodchikov らによる論文 (以下、BPZ) に始まる、無限次元のヴィラソロ対称性を持つ 2 次元の場の量子論である。ヴィラソロ代数の表現は、中心電荷と共形次元の値によって大きく異なる。特に BPZ が注目したのは、中心電荷が $c=1-(p-q)^2/pq$ (ここで p, q は互いに素な正の整数) で与えられる場合であり、これを「正の有理レベル」という。この時、ヴィラソロ代数の最高ウェイト表現の最高ウェイトベクトルに対応する場は有限個であり、閉じた演算子積を成す。この性質に基づき構成された場の理論が BPZ のミニマル模型である。

ミニマル模型がヴィラソロ代数加群として半単純であるのに対し、本研究では半単純ではない場合への拡張を調べることを目的とした。これは共形場理論の代数的側面を定式化した頂点作用素代数の立場からは、拡大 W 代数として知られている。

3. 研究の方法

ヴィラソロ加群の構造を解析するためには、スクリーニング作用素と呼ばれるヴィラソロ準同型写像が有用であるが、ハイゼンベルグ演算子 (またはボソン) による自由場表示をもちいることによって、これを具体的に構成することが出来る。よって、本研究ではこの自由場表示を主な研究方法として、拡大 W 代数の表現論的構造を調べた。特に、自由場表示ではヴィラソロ代数の特異ベクトルが対称多項式の一つであるジャック多項式によって与えられる事が知られており、具体的表示を調べる上でとても有用である。

さらに、正の有理レベルにおけるヴィラソロ加群の構造を、一般のレベルの現象の特別な場合として捉えるため、中心電荷を摂動的に 1 変数変形することにより、加群を離散変数環 $\mathcal{O}[[\hbar]]$ 上に持ち上げて解析を行った。

4. 研究成果

スクリーニング作用素を用いると、ヴィラソロミニマル模型の状態空間をスクリーニング作用素がなすフェルダーク複体のコホモロジーとして定義できることが知られているが、本研究では、フェルダーク複体の離散変数環 $\mathcal{O}[[\hbar]]$ 上への持ち上げを考察した。これは、1 の冪根の場合の量子群に対してルスティックが定義した、いわゆる「大きな量子群」の類似物に相当する。結果として、正の有理レベルでは、一度 $\mathcal{O}[[\hbar]]$ 上への持ち上げた後、

0 極限を考えることにより、フロベニウス演算子と呼ばれるスクリーニング作用素の 2 乗に相当する演算子が定義され、さらにそれが因子化されることが分かった。但し、それらのジャック多項式や sl_2 代数が生成されることなどは、厳密には証明できていない。現在は、それらの問題点をより精密化して証明することを目指している。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 1 件)

1) Explicit examples of DIM constraints for network matrix models
By Hidetoshi Awata, Hiroaki Kanno, [Takuya Matsumoto](#), Andrei Mironov, Alexei Morozov, Andrey Morozov, Yusuke Ohkubo, Yegor Zenkevich.
arXiv:1604.08366 [hep-th]. JHEP 1607 (2016) 103. (査読有り)

〔学会発表〕(計 8 件)

1. [Takuya Matsumoto](#), "A logarithmic extension of the extended W-algebra of type A_1 at positive rational level," 国際研究会：“Meeting of number theory, ring theory, Hopf algebra theory and related topics”；
日時：2019 年 2 月 22 日(金) 11:00 16:40、2 月 23 日(土) 9:40 12:00；場所：富山高等専門学校本郷キャンパス大会議室(管理棟 2 階)。
2. [松本拓也](#), "On the screening operators of the extended W-algebras of type A_1 at positive rational level" RIMS Gasshuku-style Seminar "Vertex operator algebras and conformal field theory," 2018.7.2 - 2018.7.6, Venue: Kansai Seminar House, Kyoto.
3. [松本拓也](#), "Screening operators for the conformal field theory on P^1 at the positive rational level" 日本物理学会 2017 年秋季大会, 宇都宮大学峰キャンパス(宇都宮市峰町 350), 2017 年 9 月 12 日(火)
4. [Takuya Matsumoto](#), "Supersymmetric extension of the lattice vertex operator algebras of type A_1 "
X. International Symposium QUANTUM THEORY AND SYMMETRIES 19 - 25 June 2017, Varna, Bulgaria
5. [松本拓也](#), "共形場理論の数理", Homological Algebra Geometry seminar, 2017 年 3 月 22 日, 大阪府立大学.
6. [松本拓也](#), "Supersymmetric realization of the extended W-algebra of type A_1 at positive rational level" Meeting for Study of Number theory, Hopf algebras and related topics 2017 年 2 月 12 日(日) ~ 2017 年 2 月 15 日(水) 富山大学理学部 B121
7. [Takuya Matsumoto](#), "An example of the generalized quantum groups in the conformal field theory," H-ACT 2016 (Hopf Algebras Conference in Tsukuba), September 11-13, 2016, Tsukuba International Congress Center.
8. [松本拓也](#), "Lie superalgebras and the Weyl groupoids," 修善寺,
The workshop "Duality, Integrability and Matrix Model," 2016 年 3 月 7 日.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

査読付き国際会議プロシーディング

- 1) Screening operators for the conformal field theory on P_1 at the positive rational level"
By [Takuya Matsumoto](#)
The proceedings of 'Meeting for Study of Number theory, Hopf algebras and related topics, Toyama, 12-15 February 2017' (査読有り)
- 2) Screening Operators for the Lattice Vertex Operator Algebras of Type A_1 at Positive Rational Level
By [Takuya Matsumoto](#).
Springer Proc.Math.Stat. 263 (2017) 245-253. (査読有り)
- 3) Towards the gravity/CYBE correspondence — the current status —
By [Takuya Matsumoto](#), Kentaroh Yoshida.
J.Phys.Conf.Ser. 670 (2016) no.1, 012033. (査読有り)
- 4) Towards the gravity/CYBE correspondence beyond integrability -- Yang-Baxter deformations of $T^{1,1}$
By P. Marcos Cricigno, [Takuya Matsumoto](#), Kentaroh Yoshida.
arXiv:1510.00835 [hep-th].
J.Phys.Conf.Ser. 670 (2016) no.1, 012019. (査読有り)

6 . 研究組織

(1)研究分担者
特になし。

(2)研究協力者
研究協力者氏名：橋本 義武 氏（東京都市大学）
ローマ字氏名：Yoshitake Hashimoto

研究協力者氏名：土屋 昭博 氏（Kavli IPMU）
ローマ字氏名：Akihiro Tsuchiya

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。