

令和 2 年 5 月 28 日現在

機関番号：13902

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17569

研究課題名（和文）商集合におけるデルサルトル理論の構築

研究課題名（英文）Construction of the Delsarte theory for quotient sets

研究代表者

野崎 寛 (Nozaki, Hiroshi)

愛知教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：80632778

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000円

研究成果の概要（和文）：グラフの隣接行列の固有値を、そのグラフの固有値という。正則グラフの辺次数と第二固有値（2番目に大きい固有値）の差は、スペクトラルギャップと呼ばれ、それが大きいグラフは、ある種のよい連結性を持つことが知られている。スペクトラルギャップを固定したときに、正則グラフの頂点数に対して上界を与える手法（線形計画限界）が知られている。本研究では、正則二部グラフでその類似を与え、正則一様なハイパーグラフに対して、正則グラフの線形計画限界の一般化を行った。正則一様なハイパーグラフの線形計画限界の応用として、いくつかの既存の結果を改善または拡張することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Delsarte理論とは、アソシエーションスキームまたはランク1対称空間の部分集合に対して、種々の組合せ論的対象に統一的な枠組みを与える理論である。正則一様なハイパーグラフに対する線形計画限界は、Delsarte理論の商集合版にあたり、組合せデザインを初めとする、ある種の正則性を持つ組合せ論的対象に応用可能な理論である。正則一様なハイパーグラフに対する線形計画限界を用いて、アソシエーションスキームの枠組みを超えた、スペクトル理論への応用が期待できる。

研究成果の概要（英文）：The eigenvalues of the adjacency matrix of a graph is called the eigenvalues of the graph. The difference of the degree and the second-largest eigenvalue of a regular graph is called the spectral gap, and the graph which has a large spectral gap has high connectivity in some sense. There are some methods to obtain an upper bound on the number of vertices, so called linear programming bounds. In this research project, we proved the analogous theory of the method for regular bipartite graphs, and extended the theory for regular uniform hypergraphs. Using the linear programming method for regular uniform hypergraphs, we improved and generalized some known results.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：グラフの固有値 ハイパーグラフ 線形計画限界 Delsarte理論 アソシエーションスキーム 距離正則グラフ スペクトラルギャップ

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Delsarte 理論は、様々な組合せ論的な対象を統一的に扱える代数的組合せ論における主理論の一つである。特に、アソシエーションスキームや、球面などのコンパクトな二点等質空間における線形計画限界は、その有限部分集合においてデザイン・符号的な意味で良い特徴付けを与えてきた (Delsarte's method)。球面と無限正則木は「双対」であり、正則木の商集合である有限正則グラフと球面有限集合が双対な概念と思える。本研究は、無限正則木を含む、より一般的な空間の商集合に対する Delsarte method を与えることが動機であった。

2. 研究の目的

無限正則木を含む、より一般的な空間の商集合に対する Delsarte method を与えることが最終的な目標であった。その目標に向けて具体的な目的を以下にあげる。

- (1) 無限距離正則グラフに対して、正則木における線形計画限界などを一般化する。
- (2) 非可換アソシエーションスキームにおける線形計画限界を与える。
- (3) s -距離集合の構成し、そこにコヒアラント配置の構造を発見する。

3. 研究の方法

- (1) 無限正則木の理論 (Nozaki (2015)) を、無限距離正則グラフに拡張する。Delsarte (1973) の理論を P , Q 多項式スキーム間で統一的に記述し、さらに一般的な対象での拡張を目指す。
- (2) 目的(2)と関連の深い Erdos-Ko-Rado の定理 (1973) は、Wilson (1984) により線形計画限界を用いて再証明されており、ここでの議論を参考にする。線形計画限界と相性が良いと思われる非可換アソシエーションスキームは、すでに構成することが出来ている。
- (3) 正則単体を含む極大な 2 距離集合を分類し、新たなコヒアラント配置を見つける。Bannai-Sato-Shigezumi (2012), Adachi-Nozaki (2017, 当時プレプリント) では、あるアソシエーションスキームの埋め込みに同様の議論を行っており、それを参考にする。

4. 研究成果

目的(2)については、思うような成果を得るに至らなかった。良いと思われる非可換アソシエーションスキームに対して、その隣接代数の元である冪等元の性質を上手く捉えることが出来なかったことが理由である。以下、目的(1), (3)に関する成果について報告する。

(1)

辺次数 k と第二固有値 λ_2 (二番目に大きい固有値) である正則グラフにおいて、 $\lambda_2 < 2(k-1)$ を満たすとき、そのような正則グラフは有限個しか存在しないことが Alon-Boppana により示されている。 $\lambda_2 \geq 2(k-1)$ であれば、そのような正則グラフは無数に存在する (Marcus, Spielman, and Srivastava (2015))。 $k - \lambda_2$ はスペクトルギャップと呼ばれ、その値が大きければ、ある種の連結性が保証される。スペクトルギャップを固定し、頂点数を最大化する問題に取り組んだ。正則グラフにおける線形計画限界の応用として、辺次数 k と第二固有値 $\lambda_2 < 2(k-1)$ を満たすように固定したとき、頂点数に対する一般の上界を明白な恰好で与えた。これは、Alon-Boppana の結果の別証明にもなっている。またその上界を達成するグラフは、内周が直径の 2 倍以上となる正則グラフであり、それは距離正則グラフとして特徴づけられ Moore polygon として知られている。Moore polygon の存在性は良く知られた問題であり既存の研究結果が使える。Moore polygon が存在しない場合、最大のグラフはどのようなものになるかという問題が次に考えられる。新たな結果として、第二固有値が高々 1 である正則グラフの分類を任意の辺次数において与えることにも成功した。ここで紹介した一連の結果は、S.M. Cioaba, J.H. Koolen, J.R. Vermette との共著論文として、査読付き専門雑誌 SIAM J. Discrete Math. (2016) に掲載された (Maximizing the order of a regular graph of given valency and second eigenvalue)。

S.M. Cioaba, J.H. Koolen, J.R. Vermette との共著論文での正則グラフの線形計画限界に依る成果を、正則二部グラフにおいて類似物を与えることに成功した。正則二部グラフの線形計画限界は、正則グラフのそれを真に改善する上界となっている。まず、正則二部グラフ G の次数 k と第二固有値 λ_2 を固定したとき、 G の頂点数に対する一般の上界を与えた。その上界を達成する正則二部グラフは、直径に対して内周の大きな距離正則グラフになり、無限系列を含む具体例が存在する。この上界を達成する距離正則二部グラフが存在するかどうか重要な問題であるが、直径が大きいとき存在しないことを示すことに成功した。この非存在定理の証明は、主に F.J. Fuglister (1987) での手法を参考にしたが、非常に煩雑な計算評価が必要になった。また、頂点数と次数を固定したときに第二固有値が最小となるグラフをいくつか無限系列を含む恰好で決定することが出来た。正則二部グラフの線形計画限界を用いて、Hoholdt-Justesen (Discrete Math. 325 (2014)) の第二固有値に対する上界の改善や、Teranishi-Yasuno (Kyushu J. Math. 54 (2000)) のある上界の改善、Li-Sole (European J. Combin. 17 (1996)) による第二固有値の下界の一般化が自然に得られる。この研究成果は、S.M. Cioaba, J.H. Koolen との共著論文として、査読付き専門雑誌 Algebraic Combinatorics (2019) に掲載された (A spectral version of the Moore problem for bipartite regular graphs)。

正則一様なハイパーグラフに対して、線形計画限界を与えることに成功した。正則一様なハイパーグラフは正則グラフを含むクラスであり、正則グラフの線形計画限界の一般化を与えたことになる。正則グラフは、正則木の商グラフであり、正則木は無限距離正則グラフの構造をもつ。無限距離正則グラフは分類済みであり (Ivanov (1983)), その商グラフは正則一様なハイパーグラフである。無限距離正則グラフに付随する直交多項式系が、線形計画限界の本質的な役割を果たしている。正則グラフの線形計画限界から得られる定理たちは自然と正則一様なハイパーグラフへと拡張される。この研究成果をもって研究題目にある商集合における Delsarte 理論は、一つの完成を得たと言ってよい。正則一様なハイパーグラフにおける Delsarte 理論は、組合せデザインなどの組合せ論的対象に対して応用されることが期待される。本研究成果は、S.M. Cioaba, J.H. Koolen, M. Mimura, T. Okuda との共著論文として執筆作業が進んでいる。

単独で執筆した「Largest regular multigraphs with three distinct eigenvalues」が査読付き専門雑誌「Discrete math.」へ掲載された (2019)。異なる固有値の個数を固定したとき、線形計画限界などの手法により、正則単純グラフの頂点数の上界を得ることが出来る。このとき、頂点数最大のグラフを決定することが問題となる。異なる固有値の個数が 3 である正則単純グラフは強正則グラフであることがよく知られている。強正則グラフの中には線形計画限界から得られる上界を達成するものが存在しておらず、最大なグラフを決定することが難しかった。この論文では、対象のグラフを正則単純グラフから正則多重グラフ (ループも許す) に広げることによって成功した。グラフの対象を広げてもらっていた上界の値は変わらないことに注意する。正則多重グラフに対象のグラフを広げてやることで、上界を達成するグラフを見つけ出すことが出来た。最大な正則多重グラフは、無限系列を含む次数で与えられている。この問題は、 s -距離集合の双対な問題として捉えることが出来、より一般的な枠組みの Delsarte 理論を構築するとき、良い具体例としての貢献が期待できる。

(2)

S. Suda と共同で執筆した「Complex spherical codes with three inner products」が、査読付き専門雑誌「Discrete and Computational Geometry」に掲載された (2018)。本論文では、複素球面上の有限集合 X で、 X の任意の異なる 2 つの元の標準内積の個数が 3 であるもの (3-code) のなかで、頂点数が最大な X を決定することを題材にしている。そのような X の元の個数には、ある意味で自然な上界があり、その上界を達成する集合はアソシエーションスキームの構造を持つことが知られている。アソシエーションスキームの議論を用いて、その上界を達成する集合が次元 2 のときを除いては存在しないことを示した。また、3-code は自然に有向グラフの構造を持つ。有向グラフを出来るだけ小さい次元に埋め込む手法を確立し、最大 3-code の分類を与えるアルゴリズムを与えた。そのアルゴリズムを用いたコンピュータによる計算により、次元 3 までの最大 3-code を分類することに成功している。3-code の議論は、これまでユークリッド空間上の 2-距離集合でしか確立できていなかったグラフの埋め込みの理論の 3-距離集合での類似を得るヒントになり得る。埋め込みの理論はグラム行列の固有空間の情報を明らかにすることであり、非球面集合に対する線形計画限界を明らかにするために必要である。

S. Adachi, R. Hayashi, C. Yamamoto と共同で執筆した「Maximal m -distance sets containing the representation of the Hamming graph $H(n, m)$ 」が査読付き専門雑誌「Discrete math.」に掲載された (2017)。 s -距離集合に s -距離の性質を保ったまま、新たな頂点を加えられないとき、 s -距離集合は極大であるという。球面の s -距離集合はアソシエーションスキームの埋め込みから得ることができ、その例は豊富だが、非球面の s -距離集合となると、一般の構成法は知られておらず、例が少ない。非球面距離集合の構成法のひとつは、球面 s -距離集合に s -距離の性質を保ったまま点を加えていく方法である。Johnson グラフの s -距離集合の埋め込みを含む極大な s -距離集合の調査は Bannai-Sato-Shigezumi (2012) で行われている。執筆した論文では、この類似として、ハミンググラフの s -距離集合としての埋め込みを含む s -距離集合で極大なものの分類を行った。本研究課題のひとつである s -距離集合の構成を行っており、得られた s -距離集合から、コヒアラント配置などの代数的な構造を得ることが期待できる。非球面の s -距離集合で頂点数が大きいものは知られている例が少なく、今後の非球面距離集合の線形計画限界などの一般論を構成する上で重要である。

正則単体を含む極大な 2-距離集合について、M. Shinohara と共同研究を行った。まず d 次元正則単体を $d+1$ 次元ユークリッド空間の基本ベクトルとして表し、ベクトルの各成分の和が 1 である超平面の上で距離集合を考えていく。そのとき、 d 次元正則単体に 2-距離の性質を保ったまま加えられる点の成分表示を決定し、2 点以上加えられるときの必要十分条件を与えた。正則単体を含む極大 2-距離集合の分類は、難しいことが分かったので、特に頂点数が大きいものを構成することに目的を切り替えた。2-距離集合の頂点数が大きいとき、その距離の値の自乗比が整数比になることが知られている (Larman-Rogers-Seidel (1977))。その整数比 (LRS 比と呼ぶ) を固定したときに、正則単体を含む 2-距離集合が存在する次元が高々有限個であることを示すことに成功した。LRS 比が 2 であるときは、次元は $d=7, 8$ となる。その両方の次元について、正

則単体を含む 2-距離集合で最大なものを分類することができた．実際に，そこで得られた 2-距離集合は，何も仮定しないときの $d=7,8$ の最大な 2 距離集合であり，最大 2-距離集合を再発見できたことになった．次に LRS 比が 3 のときだが，ここでは正則単体を含む 2-距離集合で最大なものは決定できていない．この場合は，強正則グラフの埋め込みで正則単体に 2-距離の性質を保ったまま付け加えることが出来るものを探し出し，その極大性を示した．これらの研究成果は，「Maximal 2-distance sets containing the regular simplex」の題目で論文としてまとめ，すでに査読付き専門誌へ提出済みである．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 S. Cioaba, J. Koolen, H. Nozaki	4. 巻 2
2. 論文標題 A spectral version of the Moore problem for bipartite regular graphs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1219-1238
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.5802/alco.71	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 H. Nozaki, S. Suda	4. 巻 60
2. 論文標題 Complex spherical codes with three inner products	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete and Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 294-317
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/s00454-018-0017-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Saori Adachi, Rina Hayashi, Hiroshi Nozaki, Chika Yamamoto	4. 巻 340
2. 論文標題 Maximal m -distance sets containing the representation of the Hamming graph $H(n,m)$	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Discrete math.	6. 最初と最後の頁 430-442
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） http://doi.org/10.1016/j.disc.2016.08.028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 S.M. Cioaba, J.H. Koolen, H. Nozaki, J.R. Vermette	4. 巻 30
2. 論文標題 Maximizing the order of a regular graph of given valency and second eigenvalue	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 SIAM J. Discrete Math.	6. 最初と最後の頁 1509-1525
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1137/15M1030935	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 H. Nozaki	4. 巻 342
2. 論文標題 Largest regular multigraphs with three distinct eigenvalues	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 2134-2138
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.04.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計15件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Maximizing the order of regular bipartite graphs for given valency and second eigenvalue
3. 学会等名 The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Maximal 2-distance sets containing the regular simplex
3. 学会等名 Research on algebraic combinatorics, related groups and algebras
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Linear programming bounds for regular uniform hypergraphs
3. 学会等名 スペクトラルグラフ理論および周辺領域 第7回研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 野崎寛
2. 発表標題 第二固有値を固定したときの連結正則二部グラフの頂点数に対する上界
3. 学会等名 第34回代数的組合せ論シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Maximizing the order of regular bipartite graphs for given valency and second eigenvalue
3. 学会等名 International Workshop on Bannai-Ito Theory (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 野崎寛
2. 発表標題 Maximizing the order of a regular bipartite graph of given second eigenvalue
3. 学会等名 代数的組合せ論および有限群・頂点作用素代数とその表現の研究
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 野崎寛
2. 発表標題 Maximizing the order of regular bipartite graphs for given valency and second eigenvalue
3. 学会等名 日本数学会 2018 年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 H. Nozaki
2. 発表標題 Largest regular multigraphs with three distinct eigenvalues
3. 学会等名 Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 H. Nozaki
2. 発表標題 Largest regular digraphs with three eigenvalues
3. 学会等名 International Workshop on Algebraic Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 H. Nozaki
2. 発表標題 Maximal m -distance sets containing the representation of the Hamming graph $H(n,m)$
3. 学会等名 The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Linear programming bounds for regular uniform hypergraphs
3. 学会等名 The 22nd Conference of the International Linear Algebra Society (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Maximal 2-distance sets containing the regular simplex
3. 学会等名 Tenth Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Linear programming methods to obtain bounds on the order of regular graphs
3. 学会等名 Joint Workshop on Algebraic Combinatorics and Cryptography
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Linear programming bounds for regular uniform hypergraphs
3. 学会等名 Sendai Workshop on Combinatorics
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 野崎寛
2. 発表標題 正則一様ハイパーグラフにおける線形計画限界について
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会 (応用数学) (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Home page - Hiroshi Nozaki
<https://hnozaki.jimdo.com/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----