

令和元年6月17日現在

機関番号：16301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17574

研究課題名(和文) Dirichlet L-関数の解析的性質および素数分布

研究課題名(英文) Analytic properties of the Dirichlet L-functions and the distribution of primes

研究代表者

宗野 恵樹 (SONO, Keiju)

愛媛大学・理工学研究科(工学系)・准教授

研究者番号：10735989

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：当研究では、リーマンゼータ関数やディリクレL-関数をはじめとする数論的な概念に結びついた様々なL-関数の解析的性質の解明を行った。具体的な研究内容は、リーマンゼータ関数の自明でない零点のうち、中心線上にあるものの割合の評価や、デデキントゼータ関数の絶対値の冪の中心上の積分の大きさの評価、保型L-関数の積の非消滅性などである。これらの研究を論文にまとめ、国内または海外のジャーナルに投稿し、そのうちのいくつかは掲載が確定した。また、国内の各所で研究内容の発表を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

リーマンゼータ関数や、それに類似するL-関数の解析的性質の研究は、素数の分布など整数論の基本的な諸問題に深く結びついており、解析的整数論における重要課題のひとつであると広く考えられている。今回の研究機関に実施した研究により、素数分布や代数体のイデアルなど、整数論における様々な概念をより深く理解することが可能になった。これらの成果は、長期的には暗号理論など現実的な問題への応用にも活用できるのではないかと期待できる。

研究成果の概要(英文)：I have studied some analytic properties of the L-functions associated to some number-theoretic concepts. Precisely, the targets are the proportion of the critical zeros of the Riemann zeta-function, the moments of the Dedekind zeta functions on the critical line, and the non-vanishing of automorphic L-functions. I wrote several papers on these topics, and submitted to some international journals. Some of them are accepted for publication. Moreover, I have talked about these studies at some institutes in Japan.

研究分野：整数論

キーワード：リーマンゼータ関数 リーマン予想 L-関数 保型形式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

リーマンゼータ関数やディリクレ L-関数をはじめとする、数論的な概念に関連する L-関数の解析的性質、特に零点の分布や関数の漸近的な大きさを調べることは、100 年以上にわたる解析的整数論の中心的テーマであり、素数分布などの整数論の基礎的な問題に結びつく重要な課題と考えられている。特に近年は主に若手数学者の台頭によりこれまでにない画期的な手法が次々と開発されており、目覚ましい発展を遂げている。

### 2. 研究の目的

当研究では、大きく分けて 1.素数および概素数の分布、2.リーマンゼータ関数や他の L-関数の零点分布という 2 つのテーマを研究対象とする。前者の研究では近年発展中の篩法の技術とその他の解析的整数論による手法を組み合わせることで、隣接する素数や概素数の差がどの程度になりうるかの評価を行う。後者の研究では、ゼータ関数の零点分布を調べる際に従来使われてきた軟因子による方法を発展させ、リーマンゼータ関数やディリクレ L-関数などの自明でない零点のうち、どの程度の割合が関数等式の中心線上に存在するのかを明らかにすることが目的である。これら 2 つのテーマは互いに密接に関連していることが知られているが、そのつながりをより明確にすることも目的の 1 つである。

### 3. 研究の方法

L-関数の零点分布の研究に関しては 100 年以上にわたり様々な方法が開発されている。研究における基本手段としては、リーマンゼータ関数に mollifier とよばれるディリクレ多項式を掛けた関数の積分評価を行い、中心線上の零点の割合を調べる。この方法は Selberg 以来 70 年以上の歴史のある古典的な手段であるが、現在でも新しい mollifier を考えることにより数値の更新がなされている。また、Kloosterman 和の評価や多重ゼータ関数の問題などとも関連しており、従来の方法と別の側面からアプローチできる可能性も含んでいる。リーマンゼータ関数について、前述した古典的な手法を十分に理解した上で新しい側面からの考察を試みるのが目標となる。L-関数の積分の大きさの評価に関しては Radziwill, Soundararajan により提唱された continuous lower bound の方法を用いて、デデキントゼータ関数など数論的な意味を持つ L-関数の絶対値のべき乗の積分の下からの評価を行う。

### 4. 研究成果

研究期間 3 年のうち、最初の 2 年は主にリーマンゼータ関数の自明でない零点の分布を研究した。自明でない零点全体のうち、どの程度の割合の零点が関数等式の中心線  $\text{Re}(s)=1/2$  上にあるのかを評価し、論文にまとめて出版した。

また、デデキントゼータ関数の絶対値の冪の中心線上における積分の下からの評価を行い、有理数乗の場合の既存の結果が実数乗の場合でも同様に成り立つことを示した。この結果も論文にまとめ、海外のジャーナルに掲載された。更に、ディリクレ L-関数と保型 L-関数のディリクレツイストがある領域で同時に非消滅になるような指標の存在について研究を行い、この結果も論文にまとめ、海外のジャーナルに掲載が確定した。

最終年度は、L-関数の中心点における非消滅を証明するための第一段階として、2 次指標に付随する L-関数の中心点における 2 乗平均の漸近的振る舞いについて研究した。主に Young が 1 乗平均と 3 乗平均の漸近公式を導く際に用いた手法を援用し、2 乗平均の漸近公式で誤差項が十分に小さいものを導出した。この結果についても論文にまとめ、現在は海外のジャーナルに投稿中である。

また、それぞれの研究成果に関しては、京都大学、上智大学、大阪大学、愛媛大学など全国各地の大学で研究発表を行った。

### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 5 件)

1. Keiju Sono, Simultaneous nonvanishing of Dirichlet L-functions and Hecke-Maass L-functions in the criticalstrip, Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica (印

刷中)

2. Keiju Sono, Small gaps between the set of products of at most two primes, Journal of the Mathematical Society of Japan (印刷中)
3. Keiju Sono, Recent progress on twin prime conjecture, RIMS Kokyuroku Bessatsu Algebraic Number Theory and Related Topics 2016 (印刷中)
4. Keiju Sono, Continuous lower bounds for the moments of Dedekind zeta-functions, Journal of Number Theory 188 (2018), 335-356
5. Keiju Sono, An application of generalized mollifiers to the Riemann zeta-function, Kyushu Journal of Mathematics, 72(2018), 35-69

〔学会発表〕(計 4 件)

1. 宗野恵樹, Moments and nonvanishing of quadratic L-functions, 上智数論ミニ集会, 2019年1月31日
2. 宗野恵樹, 2次L関数の中心値の平均とその応用, 大阪大学整数論&保型形式セミナー, 2018年12月7日
3. 宗野恵樹, 2次L関数の2乗平均とその応用, RIMS 研究集会「解析的整数論とその周辺」, 2018年10月29日
4. 宗野恵樹, Simultaneous nonvanishing of L-functions, 第11回ゼータ若手研究集会, 2018年2月19日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。