

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 5 月 29 日現在

機関番号：12301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K17577

研究課題名（和文）アフィン量子群のレベル・ゼロ表現論の幾何学的・組合せ論的研究

研究課題名（英文）Geometric and combinatorial study of level-zero representation theory of quantum affine algebras

研究代表者

石井 基裕 (Ishii, Motohiro)

群馬大学・共同教育学部・准教授

研究者番号：00732463

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：アフィン量子群の端ウェイト加群の結晶基底を実現する半無限LSパスを利用して、アフィンワイル群上の半無限ブリュア半順序に関する組合せ論的な性質について研究し、次の結果を得た。アフィンA型量子群の端ウェイト加群の結晶基底を実現する半無限ヤング盤を導入し、その柏原結晶としての構造を明示的に記述した。古典型のアフィンワイル群上の半無限ブリュア半順序に対する盤判定法を得た。また、（半無限）LSパスの一般化を導入し、一般の対称化可能カツムーディリー環に付随する量子群上の一般の端ウェイト加群の結晶基底との関連について調査した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

アフィン量子群のレベルゼロ表現に付随する組合せ論的構造に対する一般的な記述については既にいくつかの方法が知られている（例えば、半無限LSパスなど）。本研究では、古典型アフィン量子群の場合に、その一般的な記述を盤によって更に詳細に表示する方法を得た。これは古典的なヤング図形の組合せ論の類似がレベルゼロ表現論に対しても展開され得ることを示唆する結果である。また、本研究における定式化は、一部、古典的なヤング図形の組合せ論を自然に包含しているため、従来のヤング図形の組合せ論の研究に対して新たな視点を与える。

研究成果の概要（英文）：We study the semi-infinite Bruhat order on an affine Weyl group by using semi-infinite Lakshmibai-Seshadri paths. We introduce the crystal of semi-infinite Young tableaux, and show that it is isomorphic to the crystal basis of an extremal weight module over a quantum affine algebra of type A. We give a tableau criterion for the semi-infinite Bruhat order on an affine Weyl group of classical type. Also, we consider a generalization of (semi-infinite) Lakshmibai-Seshadri paths in connection with the crystal bases of extremal weight modules over a quantized universal enveloping algebra associated with a symmetrizable Kac-Moody Lie algebra.

研究分野：代数学

キーワード：アフィン量子群 アフィンワイル群 半無限LSパス 半無限ブリュア半順序 量子ブリュアグラフ 結晶基底 レベルゼロ表現

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

アフィンリー環とは、有限次元半単純リー環に付随するループ代数の中心拡大として得られる無限次元のリー環である。また、アフィンリー環に付随する量子群をアフィン量子群と呼ぶ。本研究における主な研究対象であるレベルゼロ表現とは、アフィン量子群の中心が自明に作用するような表現のことである。この表現のクラスには、有限次元表現が豊富に含まれ、様々な側面からの活発な研究が展開されている。本研究では、レベルゼロ基本表現及びレベルゼロ端ウェイト加群と呼ばれる基本的なレベルゼロ表現に着目する。これらは結晶基底と呼ばれる組合せ論的構造を持ち、それはアフィンワイル群を用いて実現されることが知られている。この実現方法は、有限次元半単純リー環の有限次元既約最高ウェイト表現の結晶基底に対する有限ワイル群による実現の類似であると見なすことができる。有限次元半単純リー環の場合には、このワイル群による実現を幾何学的佐武対応に由来する MV 輪体との関連から理解することができ、様々な応用が与えられる。一方で、レベルゼロ表現論における幾何学的佐武対応や付随する数学的構造の定式化については、未解決な部分が多く残されている。

### 2. 研究の目的

幾何学的佐武対応に付随する数学的構造をアフィン量子群のレベルゼロ表現論において定式化すること、そしてそれをアフィン量子群のレベルゼロ表現論に応用することを目的とする。

### 3. 研究の方法

幾何学的佐武対応に付随する幾何学的構造と組合せ論的構造との間の対応を記述する際には、アフィン建物を經由して考察することが有益である。アフィン建物のトーラス固定点集合はアフィンワイル群(の小部屋の集合としての実現)と同一視することができ、そこには半無限ブリュア半順序(または量子ブリュアグラフ)と呼ばれる組合せ論的構造が付随している。これら組合せ論的構造を調査し、利用することが本研究の主な方法である。

### 4. 研究成果

#### (1)半無限 LS パスモデルの標準単項式理論とその応用

与えられた柏原結晶を、より単純ないくつかの柏原結晶のテンソル積の中に埋め込んで実現することは応用上重要である。この問題を、アフィン量子群のレベルゼロ端ウェイト加群の結晶基底を実現する半無限 LS パスのなす柏原結晶に対して考察した。半無限 LS パスは、アフィンワイル群の元の列として記述される対象であり、アフィン量子群のレベルゼロ優整ウェイトを指定することに定義される。特に、レベルゼロ基本ウェイトに対応する半無限 LS パスが最も基本的であり、それらのテンソル積の中に一般の半無限 LS パスを埋め込んで実現することを考える。しかし、一般には、そのような埋め込みの方法は無限に多く存在することが知られている。本研究では、柏原の写像(を  $q=0$  に特殊化した写像)の先頭項を取り出すことによって得られる埋め込みを考察した。そして、その像に対して半無限ブリュア半順序を用いた組合せ論的な特徴付けを与えた。同様の考察を、レベルゼロ端ウェイト加群の結晶基底のデマジュール部分結晶に対しても実行し、埋め込み像に対する部分的な特徴付けを与えた。その応用として、アフィンワイル群上の半無限ブリュア半順序に対するデオダール型の判定法を得た。この判定法は、半無限ブリュア半順序をアフィンワイル群の商に射影して考察することによって、もとのアフィンワイル群上の半無限ブリュア半順序を完全に判定することができるというものである。これは、一般のコクセター群上のブリュア半順序の研究においてグラスマン元が基本的な役割を果たすという事実の類似が、アフィンワイル群上の半無限ブリュア半順序に対しても成立することを示すものでもある。

#### (2)A型アフィンワイル群の半無限ブリュア半順序の盤判定法と半無限ヤング盤

(1)の結果を A 型アフィンワイル群の場合に適用することによって、アフィン A 型のレベルゼロ端ウェイト加群の結晶基底の組合せ論的実現を与える半無限ヤング盤を導入した。また、その上の柏原結晶としての構造を明示的に記述した。この結果を得るために、まず、アフィンワイル群の有限型極大放物型部分群に付随するアフィンワイル部分群による商の半無限ブリュア半順序を考察し、それに対する盤による明示的な記述を得た。この記述は次のように与えられる。まず、商に属する各剰余類を 1 列型の盤と整数との組として実現する。この時、盤に記入される成分の間の大小関係に関する条件として半無限ブリュア半順序を記述した。この結果は、有限 A 型ワイル群のグラスマン置換の間のブリュア半順序の判定法の類似(実際には、一般化)であると見なすことができる。この類似性をもとに、通常ヤング盤を自然に拡張することによって、半無限ヤング盤を導入した。

#### (3)BCD型アフィンワイル群の半無限ブリュア半順序の盤判定法

(2)で取り上げた問題をさらにアフィン BCD 型の場合にまで拡張して考察し、同様に半無限ブリュア半順序に対する盤による判定条件を得た。この結果を得るために、まず、有限型の極大放物

型部分群による商に付随する量子ブリュアグラフの辺の分類を行った。この結果から、アフィンワイル群の有限型極大放物型部分群に付随するアフィンワイル部分群による商の上の半無限ブリュア半順序の被覆関係に対する判定条件が得られる。この条件は、(2)と同様に盤によって記述される。さらに、この結果をもとに、アフィンワイル群の任意の2つの元の間の半無限ブリュア半順序に関する順序関係に対する必要十分条件を盤の言葉で記述した。

#### (4) LS パス模型の一般化と端ウェイト加群の結晶基底

一般の対称化可能カツムーディリー環に付随する量子群の上の一般の端ウェイト加群の結晶基底に対するパスによる組合せ論的な実現は現在のところ知られていない。そのような実現を与えることを目指し、「ウェイト格子へのワイル群同変な写像に付随する LS パス」のなす柏原結晶を導入し、その性質を調査した。これは、LS パス及び半無限 LS パスを抽象化・一般化したものであり、ウェイト格子へのワイル群同変な写像のなす圏から(正則な)柏原結晶のなす圏への関手として定義される(ただし、その関手性については、一部予想を含む)。任意の端ウェイト加群の結晶基底には、最高ウェイトベクトルを一般化した、端ウェイトベクトルと呼ばれる特別なベクトルが存在する。次の予想を提出した: 与えられた端ウェイト加群の結晶基底の端ウェイトベクトルを通るワイル群軌道からウェイト格子へのワイル群同変な写像に付随する LS パスのなす柏原結晶は、その端ウェイト加群の結晶基底と柏原結晶として同型であろう。この予想は、与えられた端ウェイト加群の結晶基底に対するパスによる実現が存在するための必要条件をもとに考案されたものである。また実際に、有限型及び(捩れない)アフィン型の場合にはこの予想が正しいということも分かっている。この予想は、端ウェイト加群の結晶基底に対するワイル群による(型に依存しない)統一的な実現が存在することを主張するものである。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 石井基裕	4. 巻 2161
2. 論文標題 半無限ヤング盤がつくる柏原結晶とその応用	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 46～57
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ishii Motohiro	4. 巻 3
2. 論文標題 Semi-infinite Young tableaux and standard monomial theory for semi-infinite Lakshmibai-Seshadri paths	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1141～1163
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/alco.130	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 石井基裕	4. 巻 -
2. 論文標題 一般の extremal weight module のパス模型の構成に向けて	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 第31回有限群論草津セミナー報告集	6. 最初と最後の頁 69-78
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 石井基裕	4. 巻 -
2. 論文標題 Bott-Samelson多様体と量子ループ代数の組合せ論的表現論	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 第30回有限群論草津セミナー報告集	6. 最初と最後の頁 43-49
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 石井基裕	4. 巻 -
2. 論文標題 A型アフィン量子群とYoung図形	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 第29回有限群論草津セミナー報告集	6. 最初と最後の頁 32-36
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 石井基裕	4. 巻 -
2. 論文標題 量子ループ代数の組合せ論的表現論と腹多様体	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 第28回有限群論草津セミナー報告集	6. 最初と最後の頁 59-61
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 石井基裕
2. 発表標題 一般の extremal weight module のパスモデルの構成に向けて
3. 学会等名 第31回有限群論草津セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石井基裕
2. 発表標題 半無限Young盤がつくる柏原結晶
3. 学会等名 大阪組合せ論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石井基裕
2. 発表標題 Level-zero crystals of semi-infinite Young tableaux of untwisted affine type A
3. 学会等名 東北大学組合せ論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石井基裕
2. 発表標題 半無限ヤング盤がつくる柏原結晶とその応用
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所研究集会「表現論とその組合せ論的側面」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石井基裕
2. 発表標題 Bott-Samelson多様体と量子ループ代数の組合せ論的表現論
3. 学会等名 第30回有限群論草津セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 石井基裕
2. 発表標題 半無限ヤング盤の組合せ論について
3. 学会等名 室蘭工業大学数理科学談話会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石井基裕
2. 発表標題 A型アフィン量子群とYoung図形
3. 学会等名 第29回有限群論草津セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 石井基裕
2. 発表標題 Young図形の組合せ論と特殊線型Lie環の表現論
3. 学会等名 組合せ論サマースクール2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 石井基裕
2. 発表標題 量子ループ代数の組合せ論的表現論と腹多様体
3. 学会等名 第28回有限群論草津セミナー
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------