

令和 4 年 6 月 14 日現在

機関番号：32657

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2021

課題番号：16K17578

研究課題名（和文）ガロア表現およびその有理点問題への応用に関する研究

研究課題名（英文）Research on Galois representations and applications to rational points

研究代表者

新井 啓介 (Arai, Keisuke)

東京電機大学・未来科学部・教授

研究者番号：80422393

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：有理数体上の志村曲線の代数体上の有理点の非存在のための十分条件を得た。応用として、志村曲線におけるハッセ原理の反例の明示的な無限族を得た。さらに、このハッセ原理の反例が、Manin obstructionにより説明されることを示した。

また、ある種の高次元アーベル多様体の非存在のための十分条件を、代数的整数論の言葉で明示的に記述することができた。さらに、有限体上のアーベル多様体がQMをもつための必要十分条件を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ガロア表現は、ガロア群の理解という見地からも、また数論幾何の対象を調べる手段といった見地からも重要である。一方で有理点問題は、多項式を用いて表される方程式の解を求めるという点から、数論における最も基本的な重要課題である。中でも特にモジュライの有理点問題は、幾何的对象を分類するといった意味においても重要性を持つ。本研究は、アーベル多様体から定まるガロア表現を、その中に生じる指標を通して理解することを目指している。さらに応用として、アーベル多様体のモジュライの有理点問題、およびその周辺を開拓していくことを目指している。

研究成果の概要（英文）：We obtained a sufficient condition of non-existence of rational points over number fields on Shimura curves defined over the field of rational numbers. As an application, we obtained an explicit infinite family of counterexamples to the Hasse principle. Furthermore, we proved that such counterexamples are accounted for by the Manin obstruction.

We also obtained a sufficient condition of non-existence of higher dimensional abelian varieties in explicit terms of algebraic number theory. Furthermore, we obtained a necessary and sufficient condition for abelian varieties over finite fields of having QM.

研究分野：数論幾何

キーワード：ガロア表現 有理点 アーベル多様体 モジュライ

## 1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、楕円曲線やそのモジュライ、および楕円曲線に類似した性質を持つ QM アーベル曲面 (4 元数環による乗法をもつ 2 次元アーベル多様体) やそのモジュライである志村曲線に注目して研究を行い、以下のような成果を得た。

- (1) 有理点問題を応用した、ガロア表現の像の一様性。
  - (2) ガロア表現の中に生じる指標の分類を応用した、志村曲線の有理点の非存在。
  - (3) 指標の分類を応用した、特別なガロア表現と還元型を持つ QM アーベル曲面の有限性。
- 特に(2)の成果は、ガロア表現の表現空間の基礎体である有限体の標数が、志村曲線を定義する 4 元数環の判別式を割る場合と割らない場合に大きく分けられる。それぞれの場合で、性質の異なる指標の分類や計算を用いている。また、モジュライの有理点と対応する幾何的対象の field of definition と、その点の field of moduli は一般に異なり、そのことが原因で有理点の研究が滞っていた中、研究代表者はそれらの 2 種類の体のギャップを埋める手法を開発し、指標の分類を有理点の非存在に結び付けることに成功した。以上のことから、アーベル多様体から定まるガロア表現の中に生じる指標を調べることは極めて重要であることが分かってきた。

## 2. 研究の目的

本研究では、アーベル多様体から定まるガロア表現を、その中に生じる指標を通して理解することを目的とする。さらに応用として、アーベル多様体のモジュライの有理点問題、およびその周辺を開拓していくことを目的とする。5 つの目標を挙げる。

- (1) [アーベル多様体から定まるガロア表現の中に生じる指標の分類]  
アーベル多様体から定まるガロア表現やその中に生じる指標は、アーベル多様体の自己準同型環による強い制約を受ける。そのような指標は、限られたパターンしか起こり得ないだろうと研究代表者は推測している。ここでは、その指標のパターンを決定する。
- (2) [指標の分類を利用して、アーベル多様体のモジュライの有理点がどれくらいあるかを調べる]  
指標の分類は、アーベル多様体のモジュライの有理点問題に対して決定的に重要な役割を果たすことが、Mazur、百瀬や研究代表者の今までの研究から分かってきた。そこで、指標の分類を応用して、種々のアーベル多様体のモジュライの有理点を調べていく。
- (3) [アーベル多様体から定まるガロア表現の像の形の分類]  
ガロア表現の像を調べることは、指標の分類や有理点を調べることに密接に関連している。そこで、上記の(1)や(2)の帰結を利用して、アーベル多様体から定まるガロア表現の像の形の分類を行う。
- (4) [アーベル多様体の有限性予想の解決へ向けた貢献]  
有理点やガロア表現の像を調べることで、ある特定の性質を持つアーベル多様体の有限性が分かることがある。そこで、既に定式化されているアーベル多様体の有限性予想の解決に向けて貢献する。
- (5) [アーベル多様体のモジュライの有理点に関する一般的な予想の定式化]  
指標の分類だけでは十分な理解が得られなかったモジュライの有理点問題に対して、予想を定式化する。さらに、その予想をガロア表現の言葉で言い換え、ガロア表現の問題としても定着させ、幅広い分野の発展を目指す。

## 3. 研究の方法

- (1) 代数体上で定義されたアーベル多様体から定まるガロア表現の中に生じる指標の詳細な分類を行う。
- (2) 指標の分類を用いて、構造付きアーベル多様体のモジュライの有理点がどれくらいあるかを調べる。
- (3) アーベル多様体から定まるガロア表現の像の形を群論的な視点で調べる。
- (4) アーベル多様体の有限性予想の解決に向けて貢献する。
- (5) (2) で扱えなかった構造付きアーベル多様体のモジュライの有理点問題に対する一般的な予想を定式化し、同時にその予想をガロア表現の言葉でも表す。

## 4. 研究成果

有理数体上の志村曲線の代数体上の有理点の非存在のための十分条件を得た。応用として、志村曲線におけるハッセ原理の反例の明示的な無限族を得た。さらに、このハッセ原理の反例が、Manin obstruction により説明されることを示した。有理点とコホモロジー的なものとのつながりを示す重要な成果と考えられる。

有理数体よりも大きい基礎体上の 4 元数環による乗法(QM)をもつアーベル多様体のガロア表現の中に現れる指標の詳しい分類、および自己準同型環の分類を得た。さらに、上記の QM をもつアーベル多様体の自己準同型環の分類と指標の計算を組み合わせることで、ある種の高次元アーベル多様体の非存在のための十分条件を、代数的整数論の言葉で明示的に記述することが

できた。基礎体を広げたことで、扱える対象が大きく広がった。また、有限体上のアーベル多様体が  $QM$  をもつための必要十分条件を得た。必要条件だけでなく、必要十分条件についても分かったことは、自己準同型環の分類という文脈でも重要な意味をもつ。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Keisuke Arai	4. 巻 B72
2. 論文標題 A survey of rational points on Shimura curves	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 197-207
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 新井 啓介	4. 巻 -
2. 論文標題 志村曲線およびその関数体類似の有理点について	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 第64回代数学シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 1-13
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Keisuke Arai	4. 巻 230
2. 論文標題 Rational points on Shimura curves and the Manin obstruction	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 144-159
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/nmj.2017.6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 新井 啓介	4. 巻 -
2. 論文標題 志村曲線の虚 $2$ 次体上の有理点について	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 第12回福岡数論研究会報告集	6. 最初と最後の頁 79-86
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Keisuke Arai	4. 巻 43
2. 論文標題 Algebraic points on Shimura curves of $\Gamma_0(p)$ -type (III)	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 The Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 15-28
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11139-015-9766-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Keisuke Arai	4. 巻 701
2. 論文標題 A note on algebraic points on Shimura curves	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 9-15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/701/14147	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 新井 啓介	4. 巻 -
2. 論文標題 ディオファントス問題と志村曲線の有理点	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 第10回福岡数論研究集会報告集	6. 最初と最後の頁 83-92
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計22件 (うち招待講演 13件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 新井 啓介
2. 発表標題 QMアーベル多様体の非存在および志村曲線の有理点について
3. 学会等名 プロジェクト研究集会2020 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 新井 啓介
2. 発表標題 志村曲線およびその関数体類似の有理点の非存在について
3. 学会等名 等々力整数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keisuke Arai
2. 発表標題 Non-existence of rational points on Shimura curves and its function field analogue
3. 学会等名 Seminars and Colloquia
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keisuke Arai
2. 発表標題 Points on Shimura curves rational over imaginary quadratic fields in the non-split case
3. 学会等名 Journées Arithmétiques XXXI（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keisuke Arai
2. 発表標題 Non-existence of rational points on Shimura curves and its function field analogue
3. 学会等名 The 8th East Asia Number Theory Conference（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 新井 啓介
2. 発表標題 志村曲線およびその関数体類似の有理点について
3. 学会等名 第64回 代数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keisuke Arai
2. 発表標題 Points on Shimura curves rational over imaginary quadratic fields in the non-split case
3. 学会等名 Arithmetic and geometry of local and global fields (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 新井 啓介
2. 発表標題 志村曲線の虚2次体上の有理点について
3. 学会等名 第12回福岡数論研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Keisuke Arai
2. 発表標題 Rational points on Shimura curves
3. 学会等名 Colloquium at Sophia (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 新井 啓介
2. 発表標題 有理点問題および志村曲線の有理点について
3. 学会等名 談話会（名城大学）（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 新井 啓介
2. 発表標題 志村曲線およびその関数体類似の有理点について
3. 学会等名 プロジェクト研究集会2018（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 新井 啓介
2. 発表標題 志村曲線の有理点とハッセ原理の反例の無限族
3. 学会等名 東工大 数論・幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 新井 啓介
2. 発表標題 アーベル多様体およびそのモジュライの数論的性質に関する研究
3. 学会等名 東京電機大学総合研究所研究成果発表会（招待講演）
4. 発表年 2017年



1. 発表者名 Keisuke Arai
2. 発表標題 Rational points on Shimura curves
3. 学会等名 Laboratory of algebraic geometry: weekly seminar
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 新井 啓介
2. 発表標題 志村曲線の虚2次体上の有理点について
3. 学会等名 プロジェクト研究集会2017 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Keisuke Arai
2. 発表標題 Non-existence of rational points on Shimura curves in several cases
3. 学会等名 Hakodate workshop on arithmetic geometry 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 新井 啓介
2. 発表標題 ディオファントス問題と志村曲線の有理点
3. 学会等名 第10回福岡数論研究集会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Keisuke Arai
2. 発表標題 Rational points on Shimura curves and counterexamples to the Hasse principle
3. 学会等名 AIMS-Stellenbosch Number Theory Conference 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 新井 啓介
2. 発表標題 志村曲線の有理点とハッセ原理の反例の無限族
3. 学会等名 プロジェクト研究集会2016 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Keisuke Arai
2. 発表標題 An infinite family of counterexamples to the Hasse principle for Shimura curves
3. 学会等名 NCTS Number Theory Seminar
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 新井 啓介
2. 発表標題 代数曲線の有理点入門とサマースクールの概説
3. 学会等名 2021年度 (第28回) 整数論サマースクール「モジュラー曲線と数論」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 新井 啓介
2. 発表標題 Drinfeld-Stuhler curveの2次の関数体上の有理点について
3. 学会等名 プロジェクト研究集会2021 (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	Pennsylvania State University			
キプロス	Middle East Technical University			