

令和 4 年 6 月 9 日現在

機関番号：32670

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2021

課題番号：16K17579

研究課題名（和文）幕単代数群のモジュラス付き代数的サイクルとモチーフの研究

研究課題名（英文）Algebraic cycles and motives with modulus for unipotent algebraic groups

研究代表者

杉山 倫 (SUGIYAMA, Rin)

日本女子大学・理学部・講師

研究者番号：20633233

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,900,000円

研究成果の概要（和文）：移送付きモジュラス層の圏におけるテンソル積を経由して得られる相互層のテンソル積の構造を明らかにした。またこれを利用し、加法群や乗法群という基本的な代数群の相互層としてのテンソル積の具体的な計算をした。特に、加法群2つのテンソル積の構造を明らかにした。これは、ホモトピー不変性を利用したモチーフ理論では捉えることのできなかつた部分であり、全く新しい結果である。またヤコビ多様体のテンソル積を用いて、曲線の積に対するモジュラス付き0-サイクルのチャウ群を記述した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数多様体のモチーフに関する理論は盛んに研究され続けている理論であり、その中でホモトピー不変性を仮定しないモチーフ理論（モジュラス付きモチーフの理論）は近年発展しているものである。今回の研究成果は、ホモトピー不変でない最も基本的な対象である加法群について、新たな枠組みでの計算を行い、その構造を明らかにした。今後関連する計算は、モジュラス付きモチーフの振る舞いを明らかにすることへ繋がると思われる。

研究成果の概要（英文）：Tensor structures of reciprocity sheaves induced by tensor structures on the category of modulus sheaves with transfers were revealed. Using this I computed concretely the tensor products of the additive groups and the multiplicative groups as reciprocity sheaves. In particular, I computed the tensor product of two copies of the additive group. This is a completely new result, since the theory of motive using the homotopy invariance can not deal with that case. I also gave a description of the Chow group of 0-cycles with modulus for product of curves in terms of the tensor product of its Jacobian varieties.

研究分野：数論幾何

キーワード：相互層 加法群のテンソル積 モジュラス付き代数的サイクル

1. 研究開始当初の背景

代数多様体の重要な不変量にモチビクコホモロジー(高次チャウ群)という群がある。これはホモトピー不変性という非常に強力な性質を有する。また Voevodsky らによるモチーフの三角圏の構成にはホモトピー不変性が重要な役割を果たしている。このような枠組みにおいて、Bloch や Beauville によるアーベル多様体のチャウ群(モチビクコホモロジーの原型)に対する結果を一般の可換代数群のモチビクコホモロジー・ホモロジーに拡張した結果を私は得ていた。この結果は、ホモトピー不変性により、本質的には冪単代数群の部分からは何も情報を取り出せていない状況であった。

この状況に対し、代数多様体のホモトピー不変でない性質を捉えるための道具や枠組みが導入され、これまでの代数的サイクルやモチーフ理論を拡張する試みが始まっていた。それが、加法的チャウ群やモジュラス付き高次チャウ群、相互層とモジュラス付きモチーフの理論である。これらの基本的な性質の解明やその具体的な対象への有用性などを明らかにすることが課題となっていた。特に、ホモトピー不変性を仮定していないため、これまで捉えることのできなかつた冪単代数群のサイクル論的・モチーフ論的特徴の解明が期待される状況にあった。

2. 研究の目的

可換代数群に対し、ホモトピー不変性を用いる Voevodsky のモチーフ理論では、本質的に半アーベル多様体(アーベル多様体のトーラスによる拡大)の部分だけしか捉えることができなかつた。本研究は、ホモトピー不変性を仮定しない枠組みにおいて、冪単代数群を扱うことで、ホモトピー不変でないサイクル論的・モチーフ論的性質を明らかにすることが目的であった。特に、冪単代数群のモジュラス付き高次 0-サイクルのチャウ群の構造の決定や、相互層やモジュラス付きモチーフとしての冪単代数群の性質(主にテンソル構造との関係)を明らかにすることを目的としていた。

3. 研究の方法

染川 K 群と呼ばれるある種の K 群の群が、高次チャウ群の計算に応用がされている。またそうした群と Voevodsky のモチーフの圏におけるテンソル積との関係を示した Kahn-Yamazaki の結果がある。これらをモジュラス付き理論で展開する。つまり、可換代数群(主に冪単代数群)を移送付き相互層として扱い、相互層の圏でのテンソル積を表示しやすい・計算しやすい染川タイプの K 群で表示する。これの達成のためには、Kahn-Miyazaki-Saito-Yamazaki のモジュラス付き層の枠組みで計算をすることが必要であった。

4. 研究成果

本研究の成果は以下である。

- (1). Federico Binda 氏, Jin Cao 氏, Wataru Kai 氏との共同研究で、相互層とモジュラス付き 0-サイクルのチャウ群の捫れや可除性についての結果がプレプリントの状態であったが、専門雑誌に投稿後、掲載された。

この論文での結果は、対象とする多様体に制限はなく、一般的な状況で、モジュラス付き 0-サイクルのチャウ群と相互層について、ホモトピー不変との「差」にあたる部分の特徴を解明した。基礎体の標数が 0 である場合には、その部分が可除であることを示し、標数 p である場合には、 p -torsion であることを示した。正標数の場合に、 p を可逆化した時、相互層とホモトピー不変層のなす圏が同値となることを導く結果であり、相互層とホモトピー不変層との基本的な関係を明らかにすることに成功した。

- (2). 相互層のテンソル積に関する研究を独立に進めていた Kay Rueling 氏, Takao Yamazaki 氏との共著で、モジュラス層の理論におけるテンソル構造についてまとめた論文を専門雑誌に投稿後、掲載された。

この論文での結果は、相互層のテンソル積の計算を染川タイプの K 群で表示し、計算する研究について、目標としていた部分が完成したものである。

モジュラス層の圏は相互層をより拡張した枠組みで捉えたものであり、モジュラス付きモチーフの理論の基礎となっているものである。モジュラス層の圏には少なくとも 2 種類のテンソル構造が定義でき、それらの性質を明らかにした。特に、テンソル積を染川タイプの K 群で表示することを示し、それを利用することで、加法群二つのテンソル積の構造を解明

した。この結果は、これまでのモチーフ理論では捉えることのできなかつた全く新しい結果と言える。

またテンソル積の計算結果をモジュラス付き 0-サイクルのチャウ群に応用し、直線の積に対して、この群のそれぞれの一般ヤコビ多様体のテンソル積を用いた表示を与えた。これは先行研究の自然な拡張となっている。

さらに、射影直線上のモジュラス付き高次 0-サイクルに対するモジュラス条件の一致を示した。

- (3). (2)の論文の結果である加法群 2つのテンソル積の構造から、3つ以上のテンソル積の構造の予測を立てることができ、その一部は正しいことが証明できた。あと一つのピースの計算と証明が課題として残っている。

また、(2)で得られた加法群と乗法群のテンソル積の構造から、加法群とのテンソル積という操作と乗法群とのテンソル積という操作の関係について、予測を立てることができた。この予測は、既知の結果や加法群のみのテンソル積の予測とも両立していると推察されるものである。加法群、乗法群のテンソル積についての関係性については、計画段階では全く予期していなかったものであり、今後の重要な課題を得ることができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kay Ruelling, Rin Sugiyama, Takao Yamazaki	4. 巻 300
2. 論文標題 Tensor structures in the theory of modulus presheaves with transfers	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 929~977
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-021-02819-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 F. Binda, J. Cao, W. Kai, R. Sugiyama	4. 巻 469
2. 論文標題 Torsion and divisibility for reciprocity sheaves and 0-cycles with modulus	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 437-463
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2016.07.036	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 5件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Rin Sugiyama
2. 発表標題 Tensor structures of modulus sheaves with transfers
3. 学会等名 The 9th East Asia Number Theory Conference（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 杉山倫
2. 発表標題 Tensor products for cube-invariant sheaves
3. 学会等名 ミラノ大学 セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 杉山倫
2. 発表標題 Reciprocity 層のテンソル積の計算
3. 学会等名 東京電機大学 数学講演会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 杉山倫
2. 発表標題 Tensor product and K-group of geometric type for reciprocity sheaves
3. 学会等名 Regulators in Niseko 2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 杉山倫
2. 発表標題 K-group of geometric type for reciprocity sheaves
3. 学会等名 中央大学 代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	FREIE UNIVERSITAET BERLIN			
イタリア	The university of Milan			