様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 １９ 日現在

機関番号：８２４０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ１７５８１

研究課題名（和文）フロベニウス写像を用いた射影代数多様体の研究

研究課題名（英文）Study on projective varieties with Frobenius maps

研究代表者
三内　顕義（Sannai, Akiyoshi）

国立研究開発法人理化学研究所・革新知能統合研究センター・研究員

研究者番号：１０６１０５９５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：研究成果としては現在二つの論文が出版受理または出版の状態で、その他にプレプリントとして三本の論文を公開した。内容としては三内田中のアーベル多様体の特徴付けの研究を進展させたもので前の結果では無限回のフロベニウス押し出しをチェックする必要があった部分を一回または二回（標数2)とよりシャープな結果に改善することができた。また代数幾何学的な手法を用いてCowsikの問題と呼ばれる可換環論問題の反例を構成した。それ以外に代数学的な手法でdeep learningの研究を行った。結果としてuniversal approximation theoremと呼ばれる種類の定理を群作用付きの場合に証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
アーベル多様体は古くから研究されてきた重要な数学的対象物であり、その特徴付けを新たな視点で行えたことには学術的な意義がある。またCowsikの問題も古くから考えられてきた未解決問題でありその解決は意味は疑いようもない。最後に近年社会的に有用であることが証明されつつある深層学習において群論や代数幾何、表現論を用いて成果をあげられたことはその結果自体のみならず数学という学問や、日本の国際社会での存在感を高めることに貢献できたと考えている。

研究成果の概要（英文）：Two research papers have been published or accepted, and three papers have been published as preprints. The contents are advanced researches on the characterization of Abelian varieties in Sannai-Tanaka. In the previous result, the part which needed to check the infinite number of Frobenius pushforward. It was possible to improve to a sharper result (once or twice (characteristic 2)) . We also constructed a counterexample of the commutative ring theory problem called the Cowsik problem using algebraic geometric methods. Other than that, I did research on deep learning with algebraic methods. As a result, a kind of theorem called universal approximation theorem is proved in the case with group operation.

研究分野：数学

キーワード：アーベル多様体　フロベニウス写像　シンボリックリース環　深層学習　対称群

１．研究開始当初の背景

三内、田中による A characterization of ordinary abelian varieties by the Frobenius push-forward of the structure sheaf では構造層のフロベニウス押し出しと標準束の有効性で射影多様体がアーベル多様体になるための必要十分条件が特徴付けられている。また Hochster, Huneke らなどによるフロベニウス写像を用いた可換環論の大域版である globally F-regular varieties なども盛んに研究されている状況だった。このような状況の下先の先の三内田中の結果を進展されること、また正標数の代数幾何や可換環論が大きく進展している状況だったためこの方向で研究しようと考えた。

２．研究の目的

正標数の体上の射影代数多様体のクラスである globally F-regular variety と標数 0 の体上の射影代数多様体のクラスである Fano 型の多様体を(正標数への還元を用いて)結びつける Smith-Schwede 予想の解決 が本研究の目標である。
予想 1 (Smith-Schwede 予想)Globally F-regular variety と Fano 型の多様体(variety of Fano type)は正標 数への還元を用いて対応する。
またその過程で大域的、局所的双方の F- 特異点の理論そのものの研究やその正標数への還元の理論の深化を行い、標数 0 の代数幾何学、 正標数の代数幾何学の両方の発展に貢献できるような理論を構築することが目的である。

３．研究の方法

国内外の研究者とコミュニュケーションを取りながら研究していく。

４．研究成果

初年度は今年度はアーベル多様体の Frobenius 写像の持つ性質による特徴付け及び Cowsik の問題と呼ばれるある種の環の有限生成性に関する問 題の解決を行った。
先の研究により、正標数の代数閉体上の滑らかな射影多様体がオーディナリーなアーベル多様体であることは、標準束が擬効果的であることと、構造層の Frobenius 押し出しが(無限回の合成について)直線束の直和になることで特徴づけられた。今年度の研究ではこれが標数 3 以上の時には一回の Frobenius 押し出しでチェック可能なこと標数 2 の時は二回の Frobenius 押し出しでチェック可能なことを証明した。 また多項式環上の素イデアルのシンボリックリース環が有限生成になるか?という Cowsik による問いに対する反例の構成(標数 0 の場合は永田と Roberts によって行われた)を任意の体上で構成した。特に有限体上の場合は Totaro による nef で semi ample でない因子を持つ曲面を元に、Poonen による合同ゼータ型の Bertini の定理を用いることで素イデアルに対応する代数曲線を構成した。これらの結果は preprint として公開した。

次年度はアーベル多様体の Frobenius 写像の持つ性質による特徴付けに関する理論の深化を行った。三内-田中の研究により、正標数の代数閉体上の滑らかな射影多様体がオーディナリーなアーベル多様体と同型であることは、 標準束が擬効果的であることと、 構造層の Frobenius 押し出しが(無限回の合成について)直線束の直和になるという条件で特徴づけられてた 。昨年度の研究では東京大学の江尻氏とともにこれが標数 3 以上の時には一回の Frobenius 押し出し(が直線束の直和になるという条件)でチェック可能なこと、および標数 2 の時は二回の Frobenius 押し出し(直線束 の直和になるという条件)でチェック可能なことを証明していた(標数 2 の場合は一回の Frobenius 押し出しでは判定できない反例も構成した)。今年度はこの理論をオーディナリーでない場合に拡張した、その仮定で、これまでの「直線束の直和になる」という条件を構造層の Frobenius 押し出しが本質的にアルバネーゼ多様体のポアンカレ束のアルバネーゼ射によるフーリエ-向井変換を用いて書くことができるという条件読み換えることとなった。これによってこれまでには制御することが不可能だった、構造層の Frobenius 押し出しが既約なケース(これは加群の構造としてはほぼ

情報がないことに注意する)も取り扱うことができるようになった。またこれについてはいくつかの場所で発表を行い、城崎代数幾何シンポジウムの報告集などに結果を発表した。

今年度は深層ニューラルネットと呼ばれるある種のグラフから導出される関数の研究を代数幾何学的手法を用いて行った。まず活性化関数に ReLU 関数を用いた深層ニューラルネットとサンプルから導出される関数(損失関数)が局所的に多項式になることを示した。また他方でそのよ うな局所的な領域に対し、グラフ側も部分グラフが導出される。この状況下で局所的に存在している多項式の因数分解の様子が、導出される部分グラフの言葉で特徴付けられることを証明した。具体的には局所多項式の素因子と、部分グラフのうちノードを一つしか持たない層で挟まれたものとが一対一に対応することを示した。証明には次数付き可換環環と斉次多項式の理論を用いた。それと同時に損失曲面と呼ばれる集合が半代数的集合になることを示し、その半代数的集合としての区分が微分不可能な点たちで与えられることも証明し た。またこれらの事実の応用として深層学習の損失関数からそのサンプルたちがスカラー倍を除いて復元されることも証明した。この結果についてはプレプリントを書き、公表した。対称群に対して不変、同変な関数に対する普遍近似定理の研究を行った。不変、同変な深層ニューラルネットを定義し、コンパクト集合上にサポートを持つ不変、同変な関数に対してはその深層ニューラルネットで普遍近似定理が成立することを証明した。またこのニューラルネットのパラメーター数が通常のものより 指数的に少ないことも証明した。この結果についてもプレプリントを書いて公表した。多目的最適化のパレート解の集合の研究も行った。パレート解集合が単体上のある種の可換性を持つ多項式関数の族(ベジェ関数)の像で任意精度で近似可能なことを証明した。またそれとともにベジェ関数の可換性をベースにして、パレート解集合を近似するアルゴリズムも提案し、プレプリントを出し、国際会議にて発表も行った。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 4 件）

1. Akiyoshi Sannai, Hiromu Tanaka, Infinitely generated symbolic Rees algebras over finite fields, to appear in algebra and number theory (査読あり）

2. Sho Ejiri, Akiyoshi Sannai, A characterization of ordinary abelian varieties by the Frobenius push-forward of the structure sheaf II, International Mathematics Research Notices 2018　（査読あり）

3. Akiyoshi Sannai, Frobenius maps and algebraic varieties, 代数幾何学シンポジウム報告集, 2017 (査読なし）

4. Ken Kobayashi, Naoki Hamada, Akiyoshi Sannai, Akinori Tanaka, Kenichi Bannai, Masashi Sugiyama, Bezier Simplex Fitting: Describing Pareto Fronts of Simplicial Problems with Small Samples in Multi-objective Optimization, To appear in AAAI 2019（査読あり）

〔学会発表〕（計　5 件）

1. Ken Kobayashi, Naoki Hamada, Akiyoshi Sannai, Akinori Tanaka, Kenichi Bannai, Masashi Sugiyama, Bezier Simplex Fitting: Describing Pareto Fronts of Simplicial Problems with Small Samples in Multi-objective Optimization, AAAI 2019

2. 三内顕義「代数幾何学を用いた損失関数の研究」日本数学会 2018 年度秋季総合分科会 数学連携ワークショップ Society 5.0 と数学 2---人工知能研究と数学とのかかわり---　2019 年

3. 三内顕義　『多目的最適化とパレート解集合について』数学と諸分野の連携にむけた若

手数学者交流会　2019年

4. 三内顕義　フロベニウス写像とアーベル多様体、京都大学数理解析研究所大談話会 2018年

5. Akiyoshi Sannai, Frobenius maps and algebraic varieties, 代数幾何学シンポジウム, 2017年

〔図書〕（計　0件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：
部局名：
職名：
研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：