

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和元年6月7日現在

機関番号：13903

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17582

研究課題名(和文) 超平面配置と誤り訂正符号の融合

研究課題名(英文) A fusion of hyperplane arrangements and error correcting codes

研究代表者

中島 規博(Nakashima, Norihiro)

名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：90732115

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、超平面配置と誤り訂正符号のつながりと超平面配置・誤り訂正符号のそれぞれの理論について研究を行い、次の成果を得た。(1) Catalan配置のCoboundary多項式と拡張Hamming重み多項式を集合分割の言葉で表示した。(2) 拡張Catalan配置と拡張Shi配置のintersection latticeの要素数の指数型母関数表示を得た。(3) 超平面配置の高階自由性に関するHolmの問題を解決した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

拡張Hamming重み多項式は符号の誤り訂正能力にかかわる最小重みの情報を含む重要な多項式であり、誤り訂正符号の分野において興味の対象となっている。一方で、拡張Hamming重み多項式の計算は困難で、具体的な表示が与えられている符号のクラスは多くない。本研究では、拡張Hamming重み多項式と本質的に同じ多項式であるCoboundary多項式を、Catalan配置に関する超平面配置の理論を使いながら計算した。このようにそれぞれの分野をつなぐ具体例となった。

研究成果の概要(英文)：We studied hyperplane arrangements, error correcting codes and their relations. The results are following. (1) We expressed the coboundary polynomial and the extended Hamming weight enumerator of the Catalan arrangements using set partitions. (2) We obtained the exponential generating function of the number of elements in the intersection lattices of the extended Catalan arrangements and the extended Shi arrangements. (3) We gave answers to Holm's questions for high order freeness of hyperplane arrangements.

研究分野：超平面配置の数学

キーワード：超平面配置 誤り訂正符号 特性多項式 Hamming重み多項式 Coboundary多項式 Catalan配置 Shi配置 代数

1. 研究開始当初の背景

ベクトル空間の余次元 1 の部分空間 (超平面と呼ばれる) の集まりは超平面配置と呼ばれ、超平面の交わり方の組合せ論などが盛んに研究されている。超平面配置と誤り訂正符号には強い関わりがある。具体的には、誤り訂正符号を生成する行列は列ごとに超平面の定義式であり、逆の操作で超平面配置から誤り訂正符号が定義される。本研究を開始した当初、研究代表者は、R. Jurrius 氏や R. Pellikaan 氏による超平面配置の理論と拡張 Hamming 重み多項式をつなげる研究に興味を持っていた。彼女らの研究で特に興味深かったものとして、拡張 Hamming 重み多項式の最大次数の係数は、超平面配置の特性多項式に有限体の位数を代入した値で表されることであった。また、研究代表者は研究開始当初から「双対符号 = 超平面配置の relation space」、「符号の組織的符号化 = Boolean 配置を含む」、「MDS 符号の超平面配置 = ジェネリック配置」といった関係に気付いており、超平面配置の知識を生かして、拡張 Hamming 重み多項式の性質を調べようとした。また、超平面配置の理論と誤り訂正符号の理論の双方向からの関係を明らかにする研究を始めた。

2. 研究の目的

本研究の当初の目的は、以下の三つであった。

- (1) 符号理論で知られた例や結果を超平面配置の理論で理解する。
特に、符号から定義される超平面配置の特性多項式の性質を調べることを目的とした。特性多項式が「いつ特性多項式が一次式の積に因数分解されるか」という問題は、超平面配置の代数的性質である自由性とかかわり、多くの研究の起点になっている。符号の性質と特性多項式の関係性を明らかにし、符号理論から特性多項式の組合せ論への応用を調べようとした。
- (2) 超平面配置の例や結果を符号理論で解釈する。
特に、超平面配置から定義される符号の最小重み・重み多項式・locality を計算することを目的とした。最小重みは多くの場合に訂正数の上界を導く値であり、重み多項式は訂正能力に関わる重み分布を表す多項式である。Coxeter 配置などの具体例計算をもとに、超平面配置の性質と最小重み・重み多項式の関係を見つけ、超平面配置の理論から訂正能力の高い符号を構成することを目的とした。
- (3) それぞれの理論において別の名前で研究されているが、実際は同値な概念を整理する。
特に、超平面配置の特性多項式と符号理論の重み多項式の関係性を明らかにしようとした。本研究の開始時には、特性多項式と重み多項式の共に超平面の交わり方から計算できるという類似点に気付いていた。まずは特性多項式と重み多項式の変換式を与えることを目的とした。また、このように、それぞれの研究には対応概念の存在が期待されるため、一方の問題を他方の問題として解決する方法をみつける研究を進めた。

3. 研究の方法

本研究では、まず、2 元体上の超平面配置の自由性を研究した。誤り訂正符号に含まれるベクトルの重みを計算することと、有限体上のベクトル空間の点を含む超平面の枚数を数えることが同値であるという事実から「2 元体上の超平面配置が自由であるならば exponents に 2 が含まれる」ことが直ちに証明できる。この事実を足掛かりに、2 元体上の超平面配置の自由性をすべて決定する研究を進めた。また、2 元体上の超平面配置はハイパーグラフを使って記述することができ、具体例計算をする際に非常に有効である。特に、超平面配置が自由配置であるかどうかを帰納的に調べることができる addition-deletion-restriction 定理は、ハイパーグラフの言葉を使って書き換えられる。例えば、一つのハイパーエッジを取り除いたハイパーグラフに対応する超平面配置の自由であり、かつ同じハイパーエッジの制限から得られるハイパーグラフに対応する超平面配置が自由、さらに超平面配置の exponents が次元マイナス 1 個共通しているとき、元のハイパーグラフに対応する超平面配置が自由であることがわかる。このように、ハイパーグラフを使って具体例を計算し、exponents に 2 が含まれることとどう関係するかを調べた。

次に、誤り訂正符号の拡張 Hamming 重み多項式に関する研究を行った。誤り訂正符号に含まれるベクトルの重みは、有限体上のベクトル空間の点を含む超平面の枚数から計算できる。この関係を元に帰納的に考えると、誤り訂正符号の拡張重み多項式は、超平面配置の intersection lattice の各元に対する制限の特性多項式と局所化の要素数から計算できることがわかる。研究開始当初にはわかっていなかったが、これは Greene によりすでに知られていた関

係であり、「2. 研究の目的(3)」に述べた特性多項式と重み多項式の関係の定式化である。また、この intersection lattice の各元に対する制限の特性多項式と局所化の要素数から計算される多項式は Coboundary 多項式と呼ばれており、グラフ理論において Bad coloring を数えるために導入された多項式の、超平面配置への拡張である。このように、誤り訂正符号の拡張 Hamming 重み多項式と超平面配置の Coboundary 多項式は同じものであり、本研究では、超平面配置の制限全体の特性多項式がよく知られたクラスの Coboundary 多項式を計算して、誤り訂正符号の最小重みなど、誤り訂正能力を図る研究を進めた。

4. 研究成果

本研究における2元体上の超平面配置の自由性の研究と Coboundary 多項式に関する研究は、広島国際学院大学の辻栄周氏との共同研究である。

2元体上の超平面配置の自由性をハイパーグラフの言葉を使って記述する研究について

<成果> グラフ配置の自由性はグラフ理論で特徴づけられている。(1) グラフが elimination ordering をもつ、(2) グラフに付随する超平面配置が超可解である、(3) グラフに付随する超平面配置が自由である、(4) グラフが chordal であるすべて同値である。本研究では、(1) から(4)をハイパーグラフの言葉に書き換えたとき、(1)ならば(2)ならば(3)ならば(4)であることを証明できた。

<今後の展望> 上のように(1)から(4)の含意が示せたが、すべての論理含意に対して逆が成り立たない反例も見つけた。今後の研究では、ハイパーグラフに何らかの制限を加えたクラスで考え、(1)から(4)の関係を調べる。

<国内外における位置づけとインパクト> 超平面配置の分野では、自由配置と intersection lattice に関する Terao 予想と呼ばれる未解決な問題がある。この予想は一般には難解で、多くの研究者が解決に向けて研究を続けている。一方で、(2)と(3)の同値性から、グラフ配置のクラスでは Terao 予想が正しいことが知られている。本研究において一定の成果が得られれば2元体上の超平面配置で Terao 予想への貢献が期待させる。

Coboundary 多項式について

<成果> Catalan 配置の場合には、intersection lattice を集合分割の言葉で書き直すことができ、超平面配置の制限はすべて特性多項式の計算が可能なクラスに含まれている。さらに局所化の要素数も計算可能である。このような方法で Catalan 配置の Coboundary 多項式を計算し、同値な多項式である重み多項式を集合分割の言葉で表示した。また、本研究と平行して、拡張 Catalan 配置と拡張 Shi 配置の intersection lattice の要素数をそれぞれ指数型母関数で記述した。超平面配置の次元を固定すれば、この母関数から具体的な intersection lattice の要素数を数えられる。

<今後の展望> Shi 配置の種々の性質を調べる際に、Catalan 配置と同様の理論展開ができることが多い。まずは Catalan 配置と同様の方法で Shi 配置の Coboundary 多項式の計算を試みる。また、拡張 Catalan 配置と拡張 Shi 配置の intersection lattice の要素数に関する研究では combinatorial species が鍵となり、指数型母関数表示が得られた。combinatorial species を使って Catalan 配置や Shi 配置の Coboundary 多項式の指数型母関数表示が出来るかどうかも研究する。

<国内外における位置づけとインパクト> 拡張 Hamming 重み多項式は符号の誤り訂正能力にかかわる最小重みの情報を含み、符号理論において多くの研究者が研究する多項式である。一方で、多くの場合にその具体的な表示は知られていない。本研究で超平面配置の理論を使って Coboundary 多項式を表示することで、拡張 Hamming 重み多項式の研究に貢献する。

m-自由配置について

<成果> 本研究では、超平面配置に関する研究の視野を広げるため超平面配置の m-自由性の研究も行い、「m-自由な超平面配置は(m+1)-自由であるか？」と「すべての超平面配置は十分大きな m に対して m-自由であるか？」という Holm の問題にそれぞれ反例を挙げることで解決した。本研究は九州大学の阿部拓郎氏との共同研究である。

<今後の展望> 「すべての超平面配置は十分大きな m に対して m-自由であるか？」という問題は 3次元の超平面配置の場合は正しいことが証明できている。この証明には intersection lattice に含まれる1次元の元の局所化がすべて自由であることが鍵となっている。3次元の理論を拡張して、4次元以上の場合に十分大きな m に対して m-自由であるための必要十分条件を見つける。

<国内外における位置づけとインパクト> 本研究はまだ研究を広めている段階にあるが、自由配置など超平面配置の各分野とのかかわりを研究し、多くの研究者に重要性を広めていく。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 0 件)

〔学会発表〕(計 10 件)

[1] Norihiro Nakashima, Coboundary polynomials of Coxeter arrangements and Catalan arrangements, CIMPA School, Hyperplane Arrangements: Recent Advances and Open Problems (Workshop), 2019 年

[2] 中島規博, Hamming 重み多項式と Tutte 多項式の関係と超平面配置 coboundary 多項式, グラフの新たな局所変形の開発とその応用, 2019 年

[3] Norihiro Nakashima, High order freeness for 3-arrangements, On hyperplane arrangements, configuration spaces and related topics, 2019 年

[4] 中島規博, 阿部拓郎, 超平面配置の高階自由性に関する Holm の問題について, 九州産業大学数学教室セミナー, 九州産業大学, 2018 年

[5] 中島規博, 超平面配置の高階自由性に関する Holm の問題の反例, 2018 年度日本数学会年会, 2018 年

[6] 中島規博, A modification of the discrete Fourier transform for the code defined by Garcia-Stichtenoth tower, 代数的手法による数理論号解析, 2018 年

[7] 中島規博, 超平面配置の自由性と高階自由性 I,II, 第 4 回ワークショップ「非可換 Gorenstein 代数とその周辺」, 2017 年

[8] 中島規博, 超平面配置の高階自由性に関する基本的性質, 北海道大学表現論セミナー, 2017 年

[9] Norihiro Nakashima, Answers to some questions for high order freeness of hyperplane arrangements, Universität Bremen ALTA Oberseminar, 2017 年

[10] Norihiro Nakashima, A module of high order differential operators on a hyperplane arrangement, Hyperplane arrangements and related topics, 2017 年

〔図書〕(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

NAKASHIMA Norihiro's page

<http://nakashima.web.nitech.ac.jp/>

6 . 研究組織

研究協力者

研究協力者氏名 : 辻 栄 周平

ローマ字氏名 : Tsujie Shuhei