

令和元年6月21日現在

機関番号：34406

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17583

研究課題名(和文)有限多重ポリログと有限多重ゼータ値の関係式

研究課題名(英文)Relations of finite multiple polylogarithms and finite multiple zeta values

研究代表者

鎌野 健 (Kamano, Ken)

大阪工業大学・ロボティクス&デザイン工学部・准教授

研究者番号：50409611

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：有限多重ゼータ値のシャッフル関係式を利用することにより、有限多重ゼータ値間の関係式が得られた。この関係式の特別な場合として、ある種の重み付きの和公式が得られる。またロンサム分解可能な行列の個数を係数に持つ母関数を明示的に与え、それによりロンサム分解可能な行列の個数の法 p での値についてその性質を与えた。さらに、多重ゼータ値と関係の深い多重ベルヌーイ数・多項式について、Matiyasevichタイプと呼ばれる畳み込み関係式の拡張を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

証明した有限多重ゼータ値の公式は、有限多重ゼータ値が興味深い代数的構造を持つことを示しており、有限多重ゼータ値の今後のさらなる研究の進展に期待できる。ロンサム分解可能な行列は組合せ論的な対象であり、代数的・解析的な側面の多い多重ゼータ値の分野において、新しい見方を提供した。多重ベルヌーイ数は多重ゼータ値と関係が深く、自明には得られない畳み込み関係式を今回得たことにより、多重ベルヌーイ数がとても素性のよいものであることが示された。

研究成果の概要(英文)：By using the shuffle relation of finite multiple zeta values, new relations of finite multiple zeta values are obtained. As a special case, this relation gives a certain weighted sum formula for finite multiple zeta values.

A generating function of the number of Lonesum decomposable matrices is explicitly given, and its properties in modulo primes p are also given.

Matiyasevich type formula, which is a convolution formula, for poly-Bernoulli numbers and polynomials are obtained.

研究分野：数論

キーワード：多重ゼータ値 多重ベルヌーイ数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

多重ゼータ値は、結び目理論や数理論物理との関連性が見出されるなど、分野を超えて幅広く研究が行われている数学的对象である。多重ゼータ値の間には多くの線形関係式があり、それらの張る有理数体上線形空間の次元を確定することは多重ゼータ値の研究の最終目標の一つである。また、多重ポリログは多重ゼータ値を拡張したものであり、多重ポリログの有限類似である有限多重ポリログに関しては、関数方程式などの研究がなされている。多重ゼータ値の有限類似である有限多重ゼータ値に関しては、双対関係式や和公式といった多重ゼータ値と同種の関係式も多数証明されているが、それらは予想されるだけ多くの関係式を産み出さないことがわかっており、新たな関係式の登場が望まれている。そのような中、報告者は有限多重ゼータ値とその変形版である有限 Mordell-Tornheim 多重ゼータ値の関係をシャッフル積で記述することにより、有限多重ゼータ値の関係を導いた。これは山本氏により定義された山本積分により自然に解釈でき、積分表示を用いて新たな多重ゼータ値やその類似物の関係式を導くことにまだ研究の可能性があると考えられる。

2. 研究の目的

積分表示を用いた手法を有限多重ポリログへ適用することにより、新たな有限多重ゼータ値の関係式の導出をする。しかしそれには、和公式をはじめとする有限多重ポリログの関係式を用いる必要がある。そのため、有限多重ポリログの線形関係式を与え、有限多重ポリログの理論の基礎を作る。また、有限多重ゼータ値の関係を求め、その関係式族がどれだけ多くの関係式を含んでいるかを調べる。複シャッフル関係式と呼ばれる関係式族が全ての有限多重ゼータ値の関係を包摂するであろう、という予想があり、本研究で得られた関係式族が、複シャッフル関係式族にどの程度近いかを明らかにする。

3. 研究の方法

まず、以下の2つの手法により研究を進めていく。1つ目は、2つの多重ゼータ値の積の積分区間をうまく分割する手法である。通常、多重ゼータ値の和公式や重み付き和公式がこれにより証明されており、有限多重ポリログについても同様の公式を与える。2つ目は、母関数のガンマ関数による表示を利用する方法である。高さが1の有限多重ポリログの母関数は、不完全ガンマ関数(の有限部分)を用いた表示を持つと考えられる。不完全ガンマ関数の先行研究を用いることにより、高さが1の有限多重ポリログに関する情報を取り出す。また、適宜数値計算を援用することにより、関係式の予想を立てながら計算を進める。

次に、有限多重ポリログの関係式から有限多重ゼータ値の関係を求める。また本研究で得られた有限多重ゼータ値の関係式が複シャッフル関係式に含まれているかを次の手順で確認する。まずは重さが小さい場合に絞って数値計算により予想をたてる。包含関係の予想が立てられない場合、知られている別の関係式族を組み合わせることにより、包含関係が成立しないか検討する。

4. 研究成果

通常、多重ゼータ値は反復積分を用いて表され、2つの多重ゼータ値の積の積分区間をうまく分割することにより、多重ゼータ値の和公式や重み付き和公式が示される。本研究では、2つの有限多重ポリログの積とシャッフル関係式を用いることにより、パラメータを4つ持つような有限多重ゼータ値間の関係式を得た。有限版の多重ゼータ値の関係を積分区間の分割を用いて証明するというのは新しい手法といえる。本関係式は複雑なものであるが、パラメータを特殊化することにより、重み付き和公式の一種とみることができ、通常、重み付き和公式は2の指数にインデックスの一部をもつような和の公式を指すが、本結果で得られた公式は2の指数にインデックスの1の個数をもつような新しいタイプの関係式である。本結果は学術論文として Journal of Number Theory に掲載された。

また、ロンサム分解可能な行列の個数を係数に持つ母関数を明示的に与えた。これは知られている通常のロンサム行列の母関数の類似になっており、きれいな式で与えられる。またロンサム分解可能な行列の個数がスターリング数で表現できることから、その法 p での値について詳しく解析できる。これにより、特殊な場合において、ロンサム分解可能な行列の個数の法 p での値を決定した。これらの結果は学術論文として Discrete Mathematics に掲載された。ロンサム行列の個数はサイクルを持たない完全2部グラフと関係があるが、ロンサム分解可能な行列の個数についてもグラフ理論的な考察を行った。

さらに、多重ゼータ値と関係の深い多重ベルヌーイ数や多重ベルヌーイ多項式について、それらの畳み込み関係式を与えた。本公式は指数型の畳み込み和ではないタイプのもので、ベルヌーイ数に関する Matiyasevich の公式の拡張にあたる。指数型の畳み込み和は母関数より比較的簡単に求まることが多いが、本結果のような公式は数論的に興味深い対象の場合のみに存在すると考えられる。そのため、多重ベルヌーイ数がベルヌーイ数と同様に興味深い対象であることを示唆している。本結果は学術論文として Moscow Journal of Combinatorics and Number

Theory に掲載決定済みである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 3 件)

Ken Kamano: Matiyasevich type identities for hypergeometric Bernoulli polynomials and poly-Bernoulli polynomials, Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory (査読有) 8 (2019), 137-142.

Ken Kamano: Weighted sum formulas for finite multiple zeta values, J. Number Theory (査読有) 192 (2018), 168-180.

Ken Kamano: Lonesum decomposable matrices, Discrete Math. (査読有) 341 (2018), 341-349.

〔学会発表〕(計 3 件)

鎌野健: ロンサム行列とロンサム分解可能行列, 関西多重ゼータ研究会 (大阪体育大学, 2017.7)

鎌野健: ロンサム分解可能行列について, 第 34 回代数的組合せ論シンポジウム (小山商工会議所, 2017.6)

鎌野健: 有限多重ゼータ値の重みつき和公式, 西早稲田数論セミナー兼 P V セミナー (早稲田大学, 2016.6)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年:

国内外の別:

取得状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名:

ローマ字氏名:

所属研究機関名:

部局名:

職名:

研究者番号 (8 桁):

(2) 研究協力者

研究協力者氏名:

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。