

令和 2 年 5 月 1 2 日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17587

研究課題名（和文）スペシャルラグランジュ部分多様体の特異点

研究課題名（英文）Singularities of Special Lagrangian Submanifolds

研究代表者

今城 洋亮（Imagi, Yohsuke）

名古屋大学・多元数理科学研究科・博士研究員

研究者番号：30742902

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000 円

研究成果の概要（和文）：Harvey--Lawson T-2-cone特異点を持つスペシャルラグランジアン<sup>1</sup>の例を構成した論文が出版された。この例の特異点解消で得られるスペシャルラグランジアン<sup>2</sup>の族でunobstructed Floer cohomologyを持つものを決定するプロジェクトも進めた。特異点解消ではケーラー形式も動かすが、このプロジェクトが出来れば、unobstructed special Lagrangian<sup>3</sup>の数は保たれる。

Mohammed Abouzaidとの共著論文を或る技術的問題を除いて完成させた。Floer theory<sup>4</sup>を使ってスペシャルラグランジアン<sup>5</sup>の分岐を制御できることを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Harvey--Lawson T-2-cone特異点を持つスペシャルラグランジアン<sup>6</sup>の一般論は良く解っていたが、例は知られていなかった。一方、シンプレクティック幾何<sup>7</sup>では、正則円盤の数え上げが定めるsuperpotential<sup>8</sup>の計算はトーリックの場合等にされている。上記のプロジェクトはsuperpotential<sup>9</sup>の計算例としても面白い。

スペシャルラグランジアン<sup>10</sup>の分岐、higher multiplicity<sup>11</sup>については純粋に解析的な研究も少しずつ進んでいるが、非存在定理<sup>12</sup>については、上記のようにFloer theory<sup>13</sup>を使うのが強力である。

研究成果の概要（英文）：My paper which constructs an example of compact special Lagrangians with a Harvey--Lawson T cone singularity has been published. This paper studies also how the known theorems apply to the example. It is compatible with my on-going project of determining, in that family of special Lagrangians which smoothes the singularity of the example, those with unobstructed Floer cohomology. The smoothing process includes a variation of the ambient Kahler form under which the number of unobstructed special Lagrangians would be conserved; this would be a consequence of the project above.

I have also written, except a certain technical problem, a joint paper with Mohammed Abouzaid. This paper concerns higher multiplicities of special Lagrangians, or more precisely, it considers those special Lagrangians close to a multiple of a given nonsingular special Lagrangian. We do Floer theory for these nearby special Lagrangians, and exclude a branching phenomenon under a hypothesis on the given one.

研究分野：スペシャルラグランジアン

キーワード：calibrated geometry geometric measure theory symplectic geometry

## 1. 研究開始当初の背景

1980 年頃から 4 次元ヤン・ミルズゲージ理論等いくつかの例において非線型偏微分方程式の解全体のなす空間、即ちモジュライ空間のコンパクト化の構造が解るようになってきたが、スペシャルラグランジアン等、特に高次元の場合は未だ良く解っていない。一方、この分野は 1990 年頃から Mirror Symmetry および String Theory との相互作用が重要になってきており、その文脈では unobstructed Floer cohomology をもつスペシャルラグランジアンのみを考えるべきである。スペシャルラグランジアンのモジュライ空間のコンパクト化は幾何学的測度論により自然に得られるが、コンパクト化のために加えられる特異スペシャルラグランジアンの Floer theory は未だ良く解っていない。今の所、すべての特異点を一斉に扱う方法はないが、いくつかの単純な特異点に限れば、上記のモジュライ問題を局所的に解決できる場合があり、その研究を進めている。

## 2. 研究の目的

上記のモジュライ問題の解決、また幾何学的測度論と Floer theory との関連の研究が長期的目標である。短期的には、いくつかの単純な特異点について詳しく調べることが目的である。ある場合には、解析的には良く解るが、Mirror Symmetry 等に出てくる深谷圏論的には未だ良く解っていない。一方、従来の幾何解析では良く解らなくても、圏論的手法で新しいことができる場合もある。

## 3. 研究の方法

幾何解析としては、幾何学的測度論および 1980 年代から発達した非線型偏微分方程式に対する張り合わせ法が主な方法である。Mirror Symmetry 関連では、スペシャルラグランジアンの解析的性質と深谷圏の object としての代数的性質を結びつけることが有効であるが、これを数学的に実行する定理はまだ少ない。Thomas-Yau の一意性定理がその代表例である。本研究の一部は Thomas-Yau の定理の応用である。

## 4. 研究成果

単純な特異点のモデルの例は Harvey-Lawson  $T^2$ -cone である。この場合は 4 次元ヤン・ミルズゲージ理論と同様の結果が局所的に成り立ち、したがって幾何解析的には既に良く解っているといえる。Harvey-Lawson  $T^2$ -cone 特異点を持つコンパクトスペシャルラグランジアンの例はしばらく知られていなかったが、それを構成した。これは元のアイデアは Dominic Joyce から聞いたものだが、細部を自分で詰めた。アイデアは ordinary double points を持つ Calabi-Yau 3-fold の antiholomorphic involution の fixed-point set から始めて、その projective small resolution と fixed-point set の特異点解消を同時に行うということである。Calabi-Yau 3-fold は antiholomorphic involution を持つように或る程度対称性を高くしないといけないが、projective small resolution をつくるには generic にする方が便利である。そのバランスをうまくとることができた。

Calabi-Yau 3-fold の Kahler form について、論文では Ricci flat ではないものをつかった。プレプリントを書いた時点では Ricci flat metric の存在は知られていなかったが、その後、その存在が証明され、その Ricci flat metric に対しても、上記の構成は出来ると思う。しかし、Harvey-Lawson  $T^2$ -cone 特異点を持つコンパクトスペシャルラグランジアンの例を少なくとも一つ作るという目的は達成したので、詳しくは考えていない。

深谷圏との関連を考えると、Harvey-Lawson  $T^2$ -cone 特異点を解消して得られるスペシャルラグランジアンの族のうち、深谷圏の object になるもの（すなわち unobstructed Floer cohomology をもつもの）を決めないといけない。そのためには、スペシャルラグランジアンに境界を持つ正則円盤の数え上げをしないとといけない。これを上記の例に対し今行っている。正則円盤の数え上げが定める super potential 函数の形の予想は出来たが、その証明には張り合わせの議論が繰り返す必要になる。その部分を今詰めている。

他の特異点の例として higher multiplicity を持つスペシャルラグランジアンがある。これは集合としては特異点はないが、測度としては higher multiplicity を持つという意味であり、モジュライ空間のコンパクト化には必要である。幾何学的測度論では、higher multiplicity を扱う Almgren の理論は有るが、難しく、未だ本格的には応用されていないと思う。最近、Donaldson が然るべき building block から higher multiplicity を持つスペシャルラグランジアンに収束する非特異スペシャルラグランジアン（および他の非線型偏微分方程式に対するこの種の解）の構成を張り合わせ法により行った。このように純粋に解析的な研究も進んでいるが、私が今主に考えているのは圏論的手法である。特に、Thomas-Yau の一意性定理を使えば、

ある技術的問題を除いて、具体的な結果も出せる (Mohammed Abouzaid との共同研究)。我々の結果は素朴な解析的方法よりも適用範囲は広い。ただし、すでにふれたように、幾何学的測度論の特異点全てに対し Floer theory が出来るわけではないので、この点は限られる。また、我々の結果に必要な Floer theory、特に virtual fundamental chain に関する部分は未だ全て出来上がってはならず、これが上記の技術的問題である。我々の定理の主要部分はスペシャルラグランジアンと或る基本群の表現を対応させることである。基本群が例えば可解ならば、対応するスペシャルラグランジアンは本質的には multiplicity one のものの union であることがいえる。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yohsuke Imagi	4. 巻 25
2. 論文標題 Surjectivity of a gluing construction in special Lagrangian geometry	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Comm. Anal. Geom.	6. 最初と最後の頁 1019--1061
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yohsuke Imagi	4. 巻 -
2. 論文標題 Example of Compact Special Lagrangians with a Stable Singularity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件（うち招待講演 12件 / うち国際学会 10件）

1. 発表者名 Yohsuke Imagi
2. 発表標題 Singularities of Special Lagrangians
3. 学会等名 Pac Rim Complex Symplectic Geometry Conference（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yohsuke Imagi
2. 発表標題 Singularities of Special Lagrangians
3. 学会等名 Birational Geometry, Kahler-Einstein metrics and Degenerations（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yohsuke Imagi
2. 発表標題 On Thomas-Yau's Uniqueness Theorem
3. 学会等名 Special Holonomy and Calibrated Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yohsuke Imagi
2. 発表標題 Example of Compact Singular Special Lagrangians
3. 学会等名 NCTS Seminar on Differential Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 今城洋亮
2. 発表標題 Special Lagrange 部分多様体の特異点
3. 学会等名 名古屋大学幾何セミナー (招待講演) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 今城洋亮
2. 発表標題 Singularities of Special Lagrangians
3. 学会等名 Second Symposium in Geometry and Differential Equations at ShanghaiTech University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1．発表者名 今城洋亮
2．発表標題 Singularities of Special Lagrangians
3．学会等名 Sinica NCTS Geometry Seminar in Taipei (招待講演) (国際学会)
4．発表年 2018年

1．発表者名 今城洋亮
2．発表標題 偏微分方程式とモジュライ理論
3．学会等名 第2回数理新人セミナー (招待講演) (国際学会)
4．発表年 2018年

1．発表者名 Yohsuke Imagi
2．発表標題 Lectures on Special lagrangian submanifolds
3．学会等名 MIST Series at the Chinese Uninvestiy of Hong Kong (招待講演) (国際学会)
4．発表年 2017年

1．発表者名 Yohsuke Imagi
2．発表標題 'Singularities of Special Lagrangians'
3．学会等名 3rd Japanese-Spanish Work- shop on Differential Geometry at Madrid (招待講演) (国際学会)
4．発表年 2017年

1．発表者名 Yohsuke Imagi
2．発表標題 'Singularities of Special Lagrangians'
3．学会等名 East Asian Symplectic Conference at Chengdu (招待講演) (国際学会)
4．発表年 2017年

1．発表者名 Yohsuke Imagi
2．発表標題 'Singularities of Special Lagrangians'
3．学会等名 Gakushuin-Waseda Geometry Seminar (招待講演)
4．発表年 2017年

1．発表者名 今城洋亮
2．発表標題 Singlarities of Special Lagrangians
3．学会等名 Geometry Colloquium
4．発表年 2016年

1．発表者名 今城洋亮
2．発表標題 Singlarities of Special Lagrangians
3．学会等名 Geometry Seminars
4．発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----