様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年　 ６ 月 ２０ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ１７５９０

研究課題名（和文）Floer理論のホモトピー論的研究とその応用

研究課題名（英文）Homotopy theoretic study of Floer theory and its applications

研究代表者
笹平　裕史（Sasahira, Hirofumi）

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：３０４６６８２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：３次元多様体や４次元多様体の研究においてFloer理論が重要な役割を果たしており、Floer理論からさまざまな不変量が定義されている。これまで、Floerホモロジーを用いることが主流であったが、近年その精密化であるFloerホモトピー型というものが研究され始めている。本研究ではSeiberg-Witten-Floer理論においてFloerホモトピー型を研究した。その応用として、４次元多様体の不変量である安定ホモトピーSeiberg-Witten不変量の貼り合わせ公式を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
Floerホモロジーはこれまで、低次元トポロジーやシンプレクティック幾何学において様々な重要な応用を生み出してきた。本研究では、Seiberg-Witten理論においてFloerホモロジーの精密化であるFloer安定ホモトピー型を研究した。本研究では、Floerホモトピー型の基礎的な研究が中心であったが、いくつかの応用も得た。今後、さらなる応用が生み出せる状況にある。さらに、Seiberg-Witten理論において研究を行ったが、将来、インスタントンFloer理論やシンプレクティックFloer理論への拡張も研究されていくと考えられる。

研究成果の概要（英文）：In the study of 3 and 4-manifolds, Floer theory plays an important role. Using Floer theory, many invariants have been defined. So far, Floer homology is mainly used. However a homotopy refinement of Floer homology, called Floer stable homotopy type, has been studied recently. I have studied Floer stable homotopy type in Seiberg-Witten theory. As an application, I constructed a gluing formula for the stable homotopy Seiberg-Witten invariants for 4-manifolds.

研究分野：幾何学

キーワード：Floer理論　Seiberg-Witten理論　ホモトピー論　トポロジー

１．研究開始当初の背景

低次元トポロジーやシンプレクティック幾何学において最も重要な研究の一つは Floer 理論である。Floer 理論は、一言で述べると、無限次元 Morse 理論である。３次元多様体やシンプレクティック多様体から、ある無限次元多様体上の汎関数が定義され、（適当な条件のもと）有限次元の Morse 理論と並行した結果を証明することができる。（証明は有限次元の場合よりも困難を伴う場合が多い。）それにより、幾何学、トポロジー、シンプレクティック幾何学への応用を得ることができる場合がある。主な方法は、Floer ホモロジーを定義することである。Floer ホモロジーは無限次元多様体上で定義された汎関数の Morse ホモロジーである。つまり、汎関数の臨界点で生成される加群に、臨界点の間を流れる勾配流の本数を数えること境界作用素が定義され、その付随するホモロジーが Floer ホモロジーである。Floer ホモロジーを研究することで、様々な大変興味深い応用が得られている。

Kronheimer-Mrowka は任意の閉 spin-c３次元多様体 Y に対して, Seiberg-Witten-Floer ホモロジーを定義した。spin-c 接続とスピーノル束の切断の配置空間に Chern-Simons-Dirac 汎関数と呼ばれる汎関数 CSD が定義される。CSD の臨界点は３次元多様体 Y 上の Seiberg-Witten 方程式の解（のゲージ同値類), CSD の勾配流は Y と実数直線の直積上の Seiberg-Witten 方程式の解(のゲージ同値類)に対応している． CSD から定義される Floer ホモロジーが Seiberg-Witten-Floer ホモロジーである. Seiberg-Witten-Floer ホモロジーの応用としては､境界付き４次元多様体に対する相対 Seiberg-Witten 不変量の定義, Seiberg-Witten 不変量の張り合わせ公式, 境界付き４次元多様体の交差形式の制限などさまざまなものがある.

一方, Cohen, Jones, Segal は Floer ホモロジーを精密化する Floer 安定ホモトピー型を提唱した．無限次元多様体上の汎関数から，ある位相空間（CW 複体）の(安定）ホモトピー型を定義し、そのホモロジーをとると Floer ホモロジーと同型になるものが Floer 安定ホモトピー型である。もし、Floer 安定ホモトピー型を定義できれば、Floer ホモロジーを精密化した不変量となっており、さらなる応用が期待できる。しかし、その実現にはいろいろな困難がある。

Manolescu は第一 Betti 数が０の３次元多様体に対して、Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型を定義した。さらに三角形分割に関する未解決問題を解決や境界付き４次元多様体のトポロジーなど、著しい応用が見出され始めていた。
第一 Betti 数が正の３次元多様体への Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型拡張には本質的困難があったが, T. Khandhawit 氏, J. Lin 氏との共同研究によって、Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型のあるバージョンを構成した。この Floer 安定ホモトピー型は Kronheimer-Mrowka の Floer ホモロジーではなく、ある局所係数で捻ったものに対応するものだった。

２．研究の目的

研究の目的は Khandhawit 氏, Lin 氏との共同研究で定義した Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の応用を行うこと， もともとの Kronheimer-Mrowka の Floer ホモロジーに対応する Floer 安定ホモトピー型を構成すること，また、シンプレクティック Floer 理論やインスタントン Floer 理論へ Floer 安定ホモトピー型への構成を拡張することである。

Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の応用としては、４次元閉多様体の不変量である安定ホモトピーSeiberg-Witten 不変量の境界付き４次元多様体への拡張や、貼り合わせ公式の構成。Seiberg–Witten–Floer 安定ホモトピー型の別のバージョンの構成を行うためには、特殊な性質を持つ spectral section の構成を行うことになる．また、シンプレクティック Floer 理論やインスタントン Floer 理論への拡張は、Seiberg-Witten 理論で得た知見を生かして構成を目指すことであった。

３．研究の方法

以前定義した Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の応用については、引き続き Khandhawit 氏, Lin 氏との共同研究として継続して行った。また、新しいバージョンの Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の構成に関する研究は、Khandhawit 氏とまた、研究集会を通して議論が始まった M. Stoffregen 氏も加えて共同研究として行った。

４．研究成果

Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の応用として、４次元多様体の安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量の貼り合わせ公式を、ある技術的仮定のもと、構成することができた。その結果、４次元多様体を結び目に沿って手術したときの、安定ホモトピーSeiberg-Witten 不変量の振る舞いに関する結果を得ることができた。また、安定ホモトピーSeiberg-Witten 不変量のある消滅定理に証明を与えることができた。(消滅定理に関して、すでに知られていた結果で、別証明を与えたことになる。) この結果は、論文としてまとめ、現在投稿中である。

Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型のもう一つのバージョンの構成に関しては、Seiberg-Witten 方程式の良い有限次元近似を得るために、ある条件を満たす spectral section の構成が必要になるが、その構成に関して進展があった。
シンプレクティック Floer 理論やインスタントン Floer 理論への Floer 安定ホモトピー型の構成の拡張は、いくつかの知見を得たものの、今後さらなる研究が必要とされる状況である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計　２　件)

① T. Khandhawit, J. Lin, H. Sasahira, Unfolded Seiberg-Witten Floer spectra, I: Definition and invariance. Geom. Topol. 22 (2018), no. 4, 2027–2114.
DOI: 10.2140/gt.2018.22.2027
(査読有り)

② M. Ishida, H. Sasahira, Stable cohomotopy Seiberg-Witten invariants of connected sums of four-manifolds with positive first Betti number II: Applications. Comm. Anal. Geom. 25 (2017), no. 2, 373–393.
DOI: http://dx.doi.org/10.4310/CAG.2017.v25.n2.a4
(査読有り)

〔学会発表〕(計　１３　件)

① 笹平裕史, The Seiberg-Witten equations and topology, Geometry, Topology and Dyanamics seminaor, OIST, ２０１９年１月

② 笹平　裕史, ゲージ理論と非可換幾何学, Year-End workshop on geometry, topology and related topics in Kagoshima, 鹿児島大学, ２０１８年１２月

③ 笹平　裕史, Seiberg-Witten 方程式とトポロジー, 九州大学 数理談話会, 九州大学, ２０１８年５月

④ 笹平 裕史, Survey of basic Nahm transform, 関西ゲージ理論セミナー, 京都大学 ２０１８年５月

⑤ 笹平 裕史, Twisted Donaldson invariants, 2018 Spring operator algebra program, East China Normal University, ２０１８年４月

⑥ 笹平 裕史, The Seiberg-Witten equations and applications, 日本数学会 幾何学分科会特別講演, 東京大学, ２０１８年３月

⑦ 笹平　裕史, Analytic construction of spectral section, Gauge theory in Fukuoka, 柳川かんぽの宿, ２０１８年２月

⑧ 笹平　裕史, ゲージ理論の低次元トポロジーへの応用, 京都大学数学教室 談話会, 京都大学, ２０１７年１２月

⑨ 笹平 裕史, Twisted Donaldson invariants, Advances in non commutative geometry, 京都大学, ２０１７年５月

⑩ 笹平 裕史, Twisted Donaldson invariant, 関西ゲージ理論セミナー, 京都大学, ２０１７年３月

⑪ 笹平 裕史, Unfolded Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type, Australia-Japan Geometry, Analysis and their applications, 京都大学, ２０１７年１月

⑫ 笹平 裕史, Unfolded Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type, 幾何学セミナー、九州大学, ２０１７年１月

⑬ 笹平 裕史, Seiberg-Witten-Floer安定ホモトピー型, 関西ゲージ理論セミナー, 京都大学, ２０１６年４月

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。