様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ１７５９２

研究課題名（和文）ループ空間の高次ホモトピー構造の研究

研究課題名（英文）Study on higher homotopy structures of loop spaces

研究代表者
蔦谷　充伸（Tsutaya, Mitsunobu）

九州大学・数理学研究院・助教

研究者番号：８０７１１９９４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では位相群などのループ空間の持つ積構造に関する高次ホモトピー構造に関する研究を行った．主な結果としてLie群やゲージ群の高次ホモトピー可換性と，位相的複雑さに関する結果を得た．
前者については，Lie群に関してこれまで知られていた高次ホモトピー可換性よりも強い高次ホモトピー可換性を持つことを示すことに成功し，その応用としてこれまで難解であったゲージ群の高次ホモトピー可換性を得ることに初めて成功した．
後者については，ファイバーワイズなループ空間としての構造を調べることにより，Kleinの壷の位相的複雑さと呼ばれるホモトピー不変量の簡明な計算法を与えることに成功した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
高次ホモトピー可換性はLie群の通常の意味での可換性に端を発する問題で，長い間研究されてきた問題である．高次ホモトピー可換性がわかると分類空間の高次Whitehead積などの自明性が導かれるなど，種々の不変量の計算に重要な応用を持つ．
また，ファイバーワイズなループ構造についてはロボット動作設計に起源をもつ位相的複雑さなど，興味深い不変量が関連しているが，ファイバーワイズなループ構造自体の取り扱いが未だによくわかっておらず，まず計算が難しく，計算可能なものでも膨大な計算を必要とするものが多い．本研究では新たな計算方法であって，しかも簡明なものを提供することに成功した．

研究成果の概要（英文）：In this project, I studie higher homotopy structures of multiplications on loop spaces such as topological groups. Among the results of this project, I obtained the results on higher homotopy commutativity of Lie groups and topological complexity.
For the former result, I and the collaborators obtained the higher homotopy commutativity of Lie groups stronger than the one already known. As an application, we first succeeded to prove the higher homotopy commutativity of gauge groups.
For the latter result, I and the collaborators studied a certain fiberwise loop structure and provided an easy method to compute the homotopy invariant called the topological complexity of the Klein bottle.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：リー群　ループ空間　写像空間　位相的複雑さ　ゲージ群　高次ホモトピー可換性

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

(1) 位相群のなす圏は分類空間を取る関手により弧状連結空間の圏とホモトピー論的に圏同値（Quillen 同値）であることが知られている．Stasheff により導入された A 無限大空間は位相モノイドをホモトピー論的に一般化した概念であるが，その弧状連結成分が群をなすとき，群状であるという．これより群状 A 無限大空間のなす圏と弧状連結空間の圏とホモトピー論的に圏同値となる．

(2) A 無限大空間は高次ホモトピーの情報が明示的に与えられるため，空間のみを見ているときよりも多くの高次ホモトピー不変量を明示的に構成しやすい．高次 Massey 積や戸田ブラケットはその例である．一方で，高次ホモトピー構造は取り扱いづらい側面もある．A 無限大構造から関手的に構成される射影空間の列（Z/2Z の射影空間は実射影空間となり，古典的な射影空間の一般化になっている）を用いると，高次ホモトピーの障害理論を古典的な障害理論に帰着させることができる．これを用いて構成される不変量として高次 Hopf 不変量，高次 Whitehead 積などが知られている．

(3) 群状 A 無限大空間 G から得られる射影空間の列{B_nG}_n から基点付き写像のなす空間のタワー{Map*(B_nG,X)}_n が得られる．この塔のホモトピー群に関するスペクトル系列は Bousfield-Kan スペクトル系列と呼ばれている．本研究課題の開始前の頃にこのようなスペクトル系列の代数版は極めて簡単な構造をもつことが明らかにされていた（F.Muro 氏の結果）．このような性質は空間版で期待するのは難しいものであるが，類似した性質により未知のホモトピー作用素やホモトピー群そのものが計算できるのではないかと研究代表者は考えていた．

(4) 前述のタワーにおいて X=BH（H の分類空間）とすると，G から H への A_n 写像と呼ばれる A 無限大構造を部分的に保つ写像のなす空間のタワーに一致することを研究代表者が本研究課題開始の少し前に証明していた．とくに，H=G のときは「A_n での自己同型」のなす空間のタワーに制限することができ，タワーの構成員それぞれが再び群状 A 無限大空間となるため，ホモトピー論的にはより深い構造を持つが，それの応用は知られていなかった．

２．研究の目的

　本研究では，前述のような A_n 写像のなす空間のタワーを，そのスペクトル系列の観点から研究し，その性質を論じることを目的とした．

・ホモトピー群や（コ）ホモロジー群を計算するスペクトル系列およびその微分と高次ホモトピー作用素の関係の記述．

・コンパクト Lie 群や球面，Eilenberg-MacLane 空間などの具体例への特殊化．

・スペクトル系列から得られる高次ホモトピー不変量の高次ホモトピー可換性などの関連する問題への応用．

高次ホモトピー作用素との関係については，先行研究から戸田ブラケットや Massey 積との関係が示唆されており，これらの具体的記述及び一般化を目的とする．具体例への特殊化について，そこに挙げた具体例はそれぞれ対応するスペクトル系列が全く異なるふるまいをすることが予想される．そこで，その振る舞いを明らかにすることを目的とする．そしてこれらの課題を通じて，ループ構造や高次ホモトピー作用素について理解すること，およびその種々の応用を目的とした．

３．研究の方法

(1) G=SU(2)の場合には研究代表者によるゲージ群の高次ホモトピー構造に関する過去の研究が関係しており，その結果を一般化する形で，一般論への示唆を得ようとした．ところが，実際に研究課題に取り組んだところ，一般化に取り組む過程で，その結果に重大な誤りがあることが発覚した．今回の研究課題に取り組むことを決めるうえでの大きな動機の一つであったため，研究遂行の上での大きな問題となった．計算手法として用いていた Chern 指標の計算を改善することにした．

(2) 実際に取り組んでみると，上記の問題が生じたことや，想定していたよりもホモトピー作用素が複雑であることがわかった．そのため，一般論の様子の予想が立たず，具体例を増やすことにした．特に，G が SU(2)以外の Lie 群の場合に起こる現象について研究することにした．

(3) 写像空間のホモトピー論とファイバーワイズ空間のホモトピー論の間には密接な関係があるが，その観点からもアプローチを試みた．特に 2 つの連続写像 f,g:X->Y に対して f(x)=g(x) なる X の点 x がどのようなときに存在するかという問題はファイバーワイズ A 無限大空間である自由ループ空間と密接な関係があり，その観点からの研究を行った．また，同様に自由ループ空間と関係の深いファイバーワイズホモトピー論的な不変量である「位相的複雑さ」の計算に現れるスペクトル系列の微分についても調べた．

４．研究成果

前項「研究の方法」で述べた内容に関する結果を得た.
(1) SU(2)の場合に Chern 指標の計算を改善した（論文[2]）. 特にこれまで不明な部分の多かった素数 2 に関する部分が改善された.
(2) 共同研究により,G 以外の Lie 群に対して高次ホモトピー可換性に関する不変量を計算し，その性質を決定し，ゲージ群に応用した（論文[1]）. ゲージ群のような無限次元の位相群の高次ホモトピー可換性にアプローチする有効な方法はこれまでなかったため，このような結果は初めてのものである. これは Bousfield-Kan スペクトル系列の微分の中で最初に現れる非自明な部分に相当する結果である.
(3) 連続写像の一致点に関する不変量の定式化を行った（発表[1,11,13]）. この不変量が有効に活用される具体例を与えて論文として執筆予定である.
(4) 共同研究により, Klein の壺の「位相的複雑さ」の簡明な計算手法を与えた（論文投稿中）. また，位相的複雑さの変種である「単位位相的複雑さ」について基本的な不等式を証明した（論文投稿中）.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　2　件）

[1] Sho Hasui, Daisuke Kishimoto, Mitsunobu Tsutaya, Higher homotopy commutativity in localized Lie groups and gauge groups, Homology, Homotopy Appl. 21 (2019), 107-128.（査読有）

[2] Mitsunobu Tsutaya, Corrigendum to `Homotopy pullback of An-spaces and its applications to An-types of gauge groups' [Topology Appl. 187 (2015) 1-25], Topology Appl. 243 (2018), 159-162. （査読有）

〔学会発表〕（計　16　件）

[1] 蔦谷充伸, Pontryagin-Thom construction in topological coincidence theory, ホモトピー沖縄, 2018.

[2] Mitsunobu Tsutaya, A_n-maps and mapping spaces, Mapping Spaces in Algebraic Topology, 2018.

[3] Mitsunobu Tsutaya, Mapping spaces from projective spaces, International Conference on Manifolds, Groups and Homotopy, 2018.

[4] 蔦谷充伸, T^f_n-property of BSU(2) and relation to fiberwise An-triviality, 福岡ホモトピー論セミナー, 2018.

[5] 蔦谷充伸, Higher homotopy commutativity in localized Lie groups and gauge groups, ホモトピー論シンポジウム, 2017.

[6] Mitsunobu Tsutaya, Homotopy theoretic classifications of gauge groups, Young Researchers in Homotopy Theory and Toric Topology 2017, 2017.

[7] 蔦谷充伸, Applications of Stasheff's A_∞-theory to Lie groups, 日本数学会 2017 年度年会（特別講演）, 2017.

[8] Mitsunobu Tsutaya, Infiniteness of A_∞-types of gauge groups, Friday's Topology Seminar (Autonomous University of Barcelona), 2017.

[9] Mitsunobu Tsutaya, Higher homotopy commutativity in localized Lie groups and gauge groups, Topology & Malaga Meeting, 2017.

[10] 蔦谷充伸, Stasheff's A_n-structure and related topics, 連続講演（京都大学）, 2016.

[11] 蔦谷充伸, Coincidence Reidemeister trace and its generalization, Group Action and Topology, 2016.

[12] 蔦谷充伸, Finiteness of A_n-equivalence types of gauge groups, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 2016.

[13] 蔦谷充伸, Reidemeister trace and its generalization, 京都大学代数トポロジーセミナー, 2016.

[14] 蔦谷充伸, On the homotopy types of the spaces of maps to classifying spaces, Matsuyama Seminar on Topology, Geometry, Set theory and their Applications, 2016.

[15] 蔦谷充伸, Homotopy theoretic classification of gauge groups, 連続講演（福岡大学）, 2016.

[16] 蔦谷充伸, Mapping spces from projective spaces, 九州大学トポロジー金曜セミナー, 2016.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕

ホームページ等

http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~tsutaya/

６．研究組織

(1)研究分担者

なし

(2)研究協力者

なし

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。