

令和 2 年 6 月 12 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17594

研究課題名(和文) 擬リーマン対称空間上の固有な群作用の組合せ論的手法を用いた研究

研究課題名(英文) Combinatorial analysis of proper actions on pseudo-Riemannian symmetric spaces

研究代表者

奥田 隆幸 (Okuda, Takayuki)

広島大学・理学研究科・講師

研究者番号：40725131

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では対称空間上の固有な群作用および不連続群についての研究を行った。本研究の最も大きな成果としては、擬リーマン対称空間における固有な群作用の研究と非コンパクトリーマン対称空間における全測地的部分多様体の共役類の関係の研究が深く関連しているということが分かった。対称空間における全測地的部分多様体は局所的にはリー代数やルート系といった代数や組合せ論的な概念で捉えられる概念である。特に Dynkin 指数と呼ばれる概念を断面曲率の言葉で全測地的部分多様体に定義し、それが擬リーマン対称空間上の固有な群作用に応用できることが分かった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究のテーマである対称空間上の固有な群作用、不連続群は、微分幾何学における主要な研究分野の一つである。本研究の成果により、特に擬リーマン対称空間上の不連続群という取扱いの難しい現象が、リーマン対称空間の全測地的部分多様体(「平面内の直線」や「空間内の平面」などの一般化)と呼ばれる基本的な対象の研究と深く関連することが分かった。これはこの研究分野における重要な知見であると思われる。

研究成果の概要(英文)：In this research, we have studied proper actions and discontinuous groups for symmetric spaces. The most valuable result in this research is the following: we found deep relationships between the study of proper actions on pseudo-Riemannian symmetric spaces and that of conjugacy classes of totally geodesic submanifolds in non-compact Riemannian symmetric spaces. Totally submanifolds in symmetric spaces can be understood by Lie algebras and root systems (a kind of combinatorics objects) in some sense. In particular, we give a definition of "Dynkin indices" of totally geodesic submanifolds in symmetric spaces in terms of sectional curvatures and applied it to the study of proper actions on pseudo-Riemannian symmetric spaces.

研究分野：微分幾何学

キーワード：Lie 群 対称空間 不連続群 固有な作用

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

多様体 X , 群 G および G の X への作用を固定したとき, 「 X を局所モデルとし, G 作用で貼り合わせて得られる多様体」として (G, X) -多様体という幾何構造付き多様体のクラスが定義される. (G, X) -多様体の構成, 分類は微分幾何学において重要な研究テーマである.

G の離散部分群であって, X への作用が固有不連続であるものを (G, X) の不連続群という. (G, X) -多様体の構成法の一つとして, 不連続群の作用による商多様体として (G, X) -多様体を得るという方法がある. したがって, 「 (G, X) の不連続群の構成・分類」もまた重要な研究テーマとなる.

以下では X が対称空間, G が X の自己同型群(またはそれに近い群)である場合を考えたい. この場合には (G, X) -多様体は X と同じ局所構造を持つ局所対称空間となり, 不連続群の構成は重要なクラスの幾何構造付き多様体を供給することになる.

X がリーマン対称空間, G が X の等長変換群であるとき, G の離散部分群は(有限のレベルで適切にとり替えれば) 不連続群となる. したがって, このケースでは「不連続群の研究」は「 G の離散群の研究」とほぼ同義である. 特に X が非コンパクトであるような場合でも商多様体がコンパクトになるような不連続群が存在することが知られている (A. Borel [Topology (1963)]) など, 深い研究が広く行われている.

本研究では X が擬リーマン対称空間, G が X の等長変換群(またはそれに近い群)であるケースを研究テーマとした. この設定においては, X の計量の正定値性を仮定しないことから G の離散部分群であっても, (G, X) の不連続群にならないようなものも現れる. 特に極端なケースとして, 一葉双曲面を擬リーマン対称空間とみなしたとき, その不連続群は有限群に限るという現象 (Calabi—Markus 現象) が起こることが知られている. これは計量の正定値性を仮定する場合としない場合に, 大きく状況が異なることを示唆している.

上記設定での不連続群の系統的研究は 1980 年代以降の小林俊行氏の一連の研究に端を発する. 特に G の離散部分群が与えられたとき, 「その離散群が不連続群か否かを「固有値」の議論で判定するアルゴリズム」という画期的な手法が小林氏により開発されている [Math. Ann., (1989)], [J. Lie Theory (1996)].

小林氏の手法により, 離散部分群が与えられた場合に, それが不連続群であるか否かの判定は原理的に可能となった. その次の研究テーマとしては, 「 (G, X) の不連続群としてどのようなものがあるか? 特に筋のよいものの構成・分類を目指す」ということが自然に考えられる.

不連続群の構成法の一つとして広く用いられている手法として, G の部分リー群 L であって, X への作用が「固有(proper)」であるものを探し, L の離散部分群として (G, X) の不連続群を構成するという方法がある. 上記の小林氏のアルゴリズムは「 G の部分リー群 L が与えられたとき, その X への作用が固有か否か判定する」という手法(以下, 固有性判定法とよぶ)にも適用できるため, G の部分リー群 L が豊富に構成できれば, 「固有性判定法」, 「 L の離散部分群を構成する」という流れを通じて, (G, X) の不連続群が豊富に手に入る可能性がある.

実際, 報告者の先行研究 [J. Differential. Geom., (2013)] において, 上記 L として $SL(2, \mathbb{R})$ と局所同型となるものの構成法を整備し, またその場合の「固有性判定法」の組合せ論的な書き換えを行い, 「擬リーマン対称空間上の $SL(2, \mathbb{R})$ の固有な作用」の局所的な意味での分類アルゴリズムが与えられており, 特に曲面群など重要な群の不連続群としての実現が豊富に得られている.

以上の背景のもと, 本研究では作用する群が連結ランク 1 単純リー群の場合に, 擬リーマン対称空間上の固有な群作用の構成・分類の研究を進めることをテーマとする.

2. 研究の目的

上に述べた通り, 擬リーマン対称空間上の固有な群作用の構成・分類は微分幾何学において大きな研究テーマである. また作用する群として $SL(2, \mathbb{R})$ を考える場合には, 本質的に報告者の先行研究により分類アルゴリズムが知られていた. 本研究ではこの先行研究に続くものとして, 特に連結ランク 1 単純リー群に着目し, このような群の擬リーマン対称空間上の固有な作用を調べるということを目的とする. またよく知られていることとして, 連結ランク 1 単純リー群の離散部分群として様々な重要な離散群が得られる. したがって本研究の帰結として擬リーマン対称空間上の重要な不連続群の例の供給, ひいては重要な擬リーマン局所対称空間の例の供給が期待されるものである.

3. 研究の方法

本研究ではルート系などの組合せ論的手法を援用し, 上記の擬リーマン対称空間上の固有な群作用を構成することを目指すものである. 報告者の所属する広島大学には数学専用の図書館など設備が充実しており, 本研究は基本的に広島大学においてなされた. また 2017 年には上海交通大学に長期滞在し, 同大学の研究者らと情報交換を行いながら研究が行われた.

4. 研究成果

先に述べた通り, 本研究の目的は連結ランク 1 単純リー群に着目し, このような群の擬リーマン対称空間上の固有な作用を調べるということであった.

まず 1 つ目の成果としては, 擬リーマン対称空間として例外型と呼ばれるクラスのものを考え,

群作用として「固有かつ余コンパクト」という重要であるが非常に強い性質を要請した場合に、そのような筋の良い群が存在するか？という問題について、東條広一氏との共同研究として取り組み、「存在しない」という残念であるが非常に強い結果を得た。この結果は現在、査読付き論文として投稿準備中である。

2つ目の成果としては、田丸博士氏、久保亮氏との共同研究において、擬リーマン対称空間上の単純リー群の固有な作用の研究が、非コンパクトリーマン対称空間における全測地的部分多様体の研究と深く関わっているということが分かった。具体的には小林氏の「固有性判定定理」を非コンパクトリーマン対称空間上の「リーマン幾何学の部分多様体論」の枠組みで書き換えることができるということが結果として得られた。擬リーマン対称空間の研究において最も大きな障壁の一つとして、考えている計量が正定値とは限らないため、「リーマン幾何学」の議論がそのまま適用できないということが挙げられる。上記の成果は「点」の代わりに「部分多様体」を考えることにより、リーマン幾何学の枠組みで擬リーマン対称空間上の固有な作用の研究にアタックできるということを示唆するものである。

また2つ目の成果と関連して、リーマン幾何学の部分多様体論における重要な不変量である「断面曲率」の言葉を用いて、リーマン対称空間内の部分多様体について「Dynkin index」と呼ばれる不変量の定義を行い、その不変量が必ず整数値を取ることを示した。この Dynkin index という不変量により、特にランク1単純リー群の擬リーマン対称空間上の固有な作用の非存在定理がいくつか得られており、本研究の目的の一つであった、「ランク1単純リー群の擬リーマン対称空間上の固有な作用の分類」に向けての進展があったといえる。

本研究の目的のもう一つの目的であるランク1単純リー群の擬リーマン対称空間上の固有な作用の構成については、残念ながら本研究期間中にまとまった成果の形にはならなかったが、今後もルート系を活用したリー代数やリーマン幾何学の観点から研究を継続したい。

上記研究成果については以下の研究集会等で報告を行っている(主要なもののみ)。

- Takayuki Okuda, Totally geodesic immersions of direct products of 2-spheres in compact symmetric spaces, The 18th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on "Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems", 2020年2月.
- Takayuki Okuda, Dynkin indeces for totally geodesic submanifolds in compact symmetric spaces, The 22-nd International Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric spaces, and The 17-th RIRCM-OCAMI Joint Differential Geometry Workshop, 2019年8月.
- Takayuki Okuda, Strongly orthogonal subsets and opposition involutions of root systems, Internatinal Workshop on Bannai--Ito Theory, 2017年11月.
- 奥田隆幸, リーマン対称空間内の測地線を共有しない全測地的部分多様体の組について, 日本数学会 2017年度会 幾何学分科会特別講演, 2017年3月.
- Takayuki Okuda, Totally geodesic submanifolds of Riemannian symmetric spaces and proper actions of reductive group on Pseudo-Riemannian symmetric spaces, The fifth International Colloquium of Differential Geometry and it's Related Fields 2016, 2016年9月.

また上記研究成果については、数本分の査読付き論文の準備を現在進めているところであるが、これまでに出版された関連する論文として以下が挙げられる(主要なもののみ):

- (査読無し) Akira Kubo, Takayuki Okuda, Hiroshi Tamaru, Dynkin indices for totally geodesic submanifolds in compact symmetric spaces, Proceedings of The 22nd International Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems (22), 195—200, (2019).
- (査読あり) Takayuki Okuda, Geodesics of Riemannian symmetric spaces included in reflective submanifolds, Contemporary Perspectives in Differential Geometry and its Related Fields, World Scientific Publishing Co., 399—430, (2017).
- (査読あり) Takayuki Okuda, Abundance of nilpotent orbits in real semisimple Lie algebras, J. Math. Sci. Univ. Tokyo (24), 399—430, (2017).
- (査読あり) Maciej Bochenski, Piotr Jastrzebski, Takayuki Okuda, Aleksy Tralle, Proper $SL(2, \mathbb{R})$ -actions on homogeneous spaces, INTERNATIONAL JOURNAL OF MATHEMATICS 27(13) 1650106 --10 pages, (2016).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 奥田隆幸	4. 巻 なし
2. 論文標題 複素旗多様体内の実形の交叉の対蹠性と Floer ホモロジー	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 第65回幾何学シンポジウム予稿集	6. 最初と最後の頁 75--79
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Maciej Bochenski, Piotr Jastrzebski, Takayuki Okuda, Aleksy Tralle	4. 巻 27
2. 論文標題 Proper $SL(2;R)$ -actions on homogeneous spaces	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Internat. J. Math.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0129167X16501068	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takayuki Okuda	4. 巻 -
2. 論文標題 Abundance of nilpotent orbits in real semisimple Lie algebras	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Math. Sci. Univ. Tokyo	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takayuki Okuda	4. 巻 -
2. 論文標題 Geodesics of Riemannian symmetric spaces included in reflective submanifolds	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the 5th International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 奥田隆幸	4. 巻 -
2. 論文標題 リーマン対称空間内の測地線を共有しない全測地的部分多様体の組について	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 日本数学会2017年度会 幾何学分会 講演アブストラクト(分会特別講演)	6. 最初と最後の頁 93-101
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 奥田隆幸	4. 巻 -
2. 論文標題 リーマン対称空間中の全測地的部分多様体と擬リーマン簡約型等質空間の対応について	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 2017 名城幾何学研究集会「多様体上の計量と幾何構造」予稿集	6. 最初と最後の頁 35-39
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 奥田隆幸	4. 巻 -
2. 論文標題 Hermite 対称空間の大対蹠集合における幾何と解析	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 部分多様体論・湯沢2016 記録集	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takayuki Okuda	4. 巻 -
2. 論文標題 Cubature formulas for great antipodal sets on complex Grassmann manifolds	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録「Combinatorics of Lie Type」	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 栗原大武, 奥田隆幸	4. 巻 -
2. 論文標題 Hermite 対称空間の大対蹠集合におけるアソシエーションスキーム構造	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録「Research on Finite Groups, Algebraic Combinatorics and Vertex Operator Algebras」	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akira Kubo, Takayuki Okuda, Hiroshi Tamaru	4. 巻 22
2. 論文標題 Dynkin indices for totally geodesic submanifolds in compact symmetric spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of The 22nd International Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems	6. 最初と最後の頁 195--200
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計25件 (うち招待講演 20件 / うち国際学会 13件)

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Fourier analysis and combinatorics on compact homogeneous spaces
3. 学会等名 The Legacy of Joseph Fourier after 250 years (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Double integration and designs
3. 学会等名 2018 Mini-workshop on Designs Theory and Quantum informations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 Integrality of Dynkin indices for totally geodesic submanifolds of compact symmetric spaces
3. 学会等名 広島幾何学研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 Delsarte's theory for subsets of finite homogeneous spaces
3. 学会等名 カンドルと対称空間 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 奥田 隆幸
2. 発表標題 複素旗多様体内の実形の交叉と Floer ホモロジー
3. 学会等名 第65回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Delsarte theory for finite regular hypergraphs
3. 学会等名 The 13th USTC-AHU Joint Seminar on Algebraic Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Strongly orthogonal subsets and opposition involutions of root systems
3. 学会等名 Internatinal Workshop on Bannai--Ito Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Coding theory on compact symmetric spaces
3. 学会等名 Capital Normal University--Hiroshima University joint conference on Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Distance-transitive graphs coming from great antipodal sets on symmetric R-spaces
3. 学会等名 The 82-th KPPY Combinatorics Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 奥田 隆幸
2. 発表標題 対称空間上の符号理論における対蹠集合
3. 学会等名 研究集会「対称空間論とその周辺」～田崎博之先生の遺暦を記念して～ (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 リーマン対称空間内の測地線を共有しない全測地的部分多様体の組について
3. 学会等名 日本数学会2017年度会, 幾何学分科会特別講演(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 Delsarte theory on compact symmetric spaces
3. 学会等名 北九州ワークショップ「幾何学と組合せ論」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 リーマン対称空間中の全測地的部分多様体と擬リーマン簡約型等質空間の対応について
3. 学会等名 2017 名城幾何学研究集会「多様体上の計量と幾何構造」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Delsarte theory on compact symmetric spaces
3. 学会等名 Japan-Korea workshop on algebra and combinatorics(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takayuki Okuda, Hirotake Kurihara (講演者は奥田)
2. 発表標題 Structures of association schemes on great antipodal sets of Hermitian symmetric spaces
3. 学会等名 RIMS Workshop: Research on Finite Groups, Algebraic Combinatorics and Vertex Operator Algebras (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 Hermite 対称空間の大対蹠集合における幾何と解析
3. 学会等名 部分多様体論・湯沢2016 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Delsarte theory for quotients of association schemes
3. 学会等名 International Workshop of Algebraic Combinatorics (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 複素グラスマン多様体における大対蹠集合を用いた積分近似公式について
3. 学会等名 RIMS研究集会「リー型の組合せ論 (Combinatorics of Lie Type)」 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takyuki Okuda
2. 発表標題 Totally geodesic submanifolds of Riemannian symmetric spaces and proper actions of reductive group on Pseudo-Riemannian symmetric spaces
3. 学会等名 The fifth International Colloquium of Differential Geometry and it's Related Fields 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 Designs and Codes on commutative association schemes
3. 学会等名 乱数と超一様性集会 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 久保亮, 奥田隆幸, 田丸博士 (講演者は久保)
2. 発表標題 Hermite 対称空間内の全測地的複素曲線
3. 学会等名 日本数学会2016年度秋季総合分科会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Totally geodesic immersions of direct products of 2-spheres in compact symmetric spaces
3. 学会等名 The 18th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on "Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 奥田 隆幸
2. 発表標題 Combinatorics and Fourier analysis on compact symmetric spaces
3. 学会等名 研究集会「カンドルと対称空間 2019」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Delsarte's theory on coherent configurations
3. 学会等名 Sendai Workshop on Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Dynkin indeces for totally geodesic submanifolds in compact symmetric spaces
3. 学会等名 The 22-nd International Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric spaces, and The 17-th RIRC-OCAMI Joint Differential Geometry Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

奥田隆幸のホームページ http://home.hiroshima-u.ac.jp/okudatak/index.html
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	田丸 博士 (Tamaru Hiroshi)		
研究協力者	久保 亮 (Kubo Akira)		
研究協力者	東條 広一 (Tojo Koichi)		