

令和 2 年 5 月 25 日現在

機関番号：17701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17596

研究課題名（和文）非可換トーリック幾何の研究

研究課題名（英文）Research on non-commutative toric geometry

研究代表者

石田 裕昭 (Ishida, Hiroaki)

鹿児島大学・理工学域理学系・助教

研究者番号：00722422

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：コンパクトな複素多様体上に canonical foliation を導入し、その横断的な性質を調べた。特に複素多様体が極大なトーラス作用を許容する場合に、canonical foliation の横断的な振る舞いが非特異、完備なトーリック多様体と非常に似ていることを示した。トーリック幾何では有理的な扇とトーリック多様体に対応するが、ある意味で無理的な扇に対して、素性の良い幾何学的対象に対応することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

各トーリック多様体は「トーリック幾何の基本定理」によって有理扇と呼ばれる組み合わせ論の対象と一対一に対応し、このことから代数幾何学の問題を組合せ論の問題に帰着、あるいは逆に組合せ論の問題を代数幾何学の手法を用いて解決することがなされた。

トーリック多様体は有理扇と対応し、また射影的トーリック多様体は格子凸多面体と対応する。一方で、有理でない扇や格子的でない凸多面体は数多くあり、「トーリック幾何の基本定理を、有理でない扇や凸多面体に対しても意味があるように拡張できるか」が問われている。

本研究の成果として、ある種の葉層構造を通じて、この問いに一定の回答を与えた。

研究成果の概要（英文）：The notion of canonical foliation on a compact complex manifold is introduced. It is shown that a compact complex manifold admitting a maximal torus action behaves similarly to nonsingular complete toric variety with respect to the canonical foliation. Such foliated manifolds can be described by the corresponding marked fans which generalize the notion of rational fans.

研究分野：幾何学

キーワード：複素多様体 トーラス作用 葉層構造 トーリック多様体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

代数幾何学, 特に Hilbert の零点定理と呼ばれる基本的な定理により, アフィン代数多様体は, その上の (しかるべき性質を満たす) 関数のなす環との関係が明確になっている. アフィン代数多様体でなくとも同様に, 任意の局所コンパクトハウスドルフ空間に対して, その上の連続関数のなす環から, 元の空間が復元される (Gelfand 表現). したがって, 一定の性質を持った空間を, 対応する可換環を考察することによって元の空間に関する種々の幾何学的情報を取り出すことができる. 非可換幾何学は, この可換環と幾何学的な対象との間の対応を, 非可換な環と「非可換空間」に拡張しようとするものである. 葉層多様体などに対しては, 自然な方法で非可換環を対応させることができる.

代数多様体のうち, 特別なものとして, トーリック多様体がある. 各トーリック多様体は, 「トーリック多様体の基本定理」によって有理扇と呼ばれる組合せ論の対象と一対一に対応し, このことから代数幾何の問題を組合せ論の問題に帰着, あるいは逆に組合せ論の問題を代数幾何の手法を用いて解決することがなされた.

代数多様体は (局所的には) 可換環として捉えられ, またトーリック多様体は代数多様体である. 従って自然な問題として, 「非可換空間の中で, 代数多様体におけるトーリック多様体に相当するものは何か」が問われた. Cirio, Landi, Szabo らは, 純粋な代数の枠組みの範疇で非可換トーリック多様体を定義していた ([2]). Katzarkov, Lupercio, Meersseman, Verjovsky らは, LVM manifold と呼ばれるものの上にある特別な葉層構造を考え, その葉空間を非可換トーリック多様体と呼んでいる ([8]). Auroux, Katzarkov, Orlov らは, 射影空間のスタックとしての非可換な変形を考え, その上でホモロジーミラー対称性を示すことに成功していた ([1]).

一方で研究代表者は, これまでの研究によって, LVM manifold の内在的な定義ができること, 及び上述した特別な葉層構造が内在的なものであることを証明していた (のちに加筆後, 出版された [3], [4]). この視点から研究を推進することは新規性があった.

2. 研究の目的

トーリック多様体は具体的な代数多様体の例を豊富に与え, それ故にホモロジーミラー対称性予想や, 標準的な計量の存在問題など, 興味深い問題のテストがしばしばなされる. 一方で, 葉層多様体など, 「非可換」な微分可能な空間の範疇で, 「非可換トーリック幾何学」が現在のところ十分発展しているとは言えないが, 射影空間の幾つかの非可換な変形に関しては, 少しずつ研究され始めていた.

本研究の主目的は, 「非可換トーリック幾何学」の基礎理論を構築, 発展させることである. 各研究者がそれぞれの立場から「非可換トーリック多様体」を定義し, 研究が活発になってきている. 一方で, 彼らは特別な外在的なデータから出発し, そのデータから構成されるものを非可換トーリック多様体と呼んでいる. また, 彼らの構成はいずれも非常に複雑である. (通常の) トーリック多様体と同様に, 非可換トーリック多様体の場合でも「外在的なデータを用いない」定義があるべきであり, 組合せ的なデータから構成する際も簡明な方法があるべきである. 本研究では, 非可換トーリック多様体の内在的な定義及び「非可換トーリック多様体の基本定理」, すなわち非可換トーリック多様体の圏と, ある種の組合せ論の対象のなす圏が圏同値であることを示すことを主目的とした. また基本定理の組合せ論, 複素幾何, 微分幾何, 数理物理, 可換代数および非可換代数への応用を模索した.

3. 研究の方法

研究代表者がこれまでに研究を行っていた, (一般に代数的でない) 複素多様体へのトーラス作用に関連する研究結果を用いた ([3]).

4. 研究成果

コンパクトな複素多様体上に canonical foliation を導入し, その foliation の上に transverse Kaehler 構造があるような状況下で, 元の複素体の de Rham complex および Dolbeault complex と quasi-isomorphic になるようなよいモデルを与えた ([6]).

トーラス作用で不変な葉層構造, 横断ケーラー構造とモーメント写像を統一的に扱い, canonical foliation があるクラスの葉層構造の下界であることや, シンプレクティック幾何学における Atiyah, Guillemin-Sternberg の convexity theorem の類似が成り立つことを示した ([4]).

極大なトーラス作用付きの複素多様体に canonical foliation を入れたものの, 横断同値類の分類を行った. marked fan の概念を導入し, 極大なトーラス作用付きの複素多様体に marked fan を対応させることができることと, 横断同値類がほぼ marked fan で分類できることを示した. これの応用として, basic cohomology の環構造を対応する marked fan で記述し, また横断

ケーラーの場合には basic Hodge 数が中央に集中することを示した([5],[7]).

参考文献

[1] Denis Auroux, Ludmil Katzarkov and Dmitri Orlov, "Mirror symmetry for weighted projective planes and their noncommutative deformations", *Ann.of Math. (2)* **167** (2008), no.3, 867-943.

[2] Lucio S. Cirio, Giovanni Landi and Richard J. Szabo, "Algebraic deformations of toric varieties I. General Constructions", *Adv. Math.* **246** (2013), 33-88.

[3] Hiroaki Ishida, "Complex manifolds with maximal torus actions", *J. Reine Angew. Math.* **751** (2019), 121-184.

[4] Hiroaki Ishida, "Torus invariant transverse Kähler foliations", *Trans. Amer. Math. Soc.* **369** (2017), no. 7, 5137-5155.

[5] Hiroaki Ishida, "Towards transverse toric geometry", arXiv:1807.10449.

[6] Hiroaki Ishida and Hisashi Kasuya, "Transverse Kähler structures on central foliations of complex manifolds", *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **198** (2019), no.1, 61-81.

[7] Hiroaki Ishida, Roman Krutowski and Taras Panov, "Basic cohomology of canonical holomorphic foliations on complex moment-angle manifolds", arXiv:1811.12038.

[8] Ludmil Katzarkov, Ernesto Lupercio, Laurent Meersseman and Alberto Verjovsky, "The definition of a non-commutative toric variety", *Algebraic topology: applications and new directions*, *Contemp. Math.* **620**, 223-250, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ishida Hiroaki, Kasuya Hisashi	4. 巻 198
2. 論文標題 Transverse Kaehler structures on central foliations of complex manifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -)	6. 最初と最後の頁 61-81
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s10231-018-0762-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroaki Ishida	4. 巻 2019
2. 論文標題 Complex manifolds with maximal torus actions	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal für die reine und angewandte Mathematik	6. 最初と最後の頁 121-184
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1515/crelle-2016-0023	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroaki Ishida	4. 巻 369
2. 論文標題 Torus invariant transverse Kaehler foliations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Transaction of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 5137-5155
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1090/tran/7070	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Hiroaki Ishida
2. 発表標題 Quotients of toric varieties
3. 学会等名 Toric Topology 2019 in Okayama
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石田裕昭
2. 発表標題 極大トーラス作用付きの複素多様体とその葉層構造
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会 幾何学分会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroaki Ishida
2. 発表標題 Transverse Kaehler structures on central foliations
3. 学会等名 変換群を核とする代数的位相幾何学
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroaki Ishida
2. 発表標題 De Rham and Dolbeault Models of Moment-Angle Manifolds
3. 学会等名 The Princeton-Rider Workshop on the Homotopy Theory of Polyhedral Products (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 石田裕昭
2. 発表標題 Topology of central foliations
3. 学会等名 群作用と位相
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroaki Ishida
2. 発表標題 Complex manifolds with maximal torus actions
3. 学会等名 Workshop on Torus Actions in Topology (招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----