様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 30 年　 6 月 22 日現在

機関番号：３４３１５
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2016～2017
課題番号：１６Ｋ１７５９７

研究課題名（和文）スライス・リボン予想の研究

研究課題名（英文）On the slice-ribbon conjecture

研究代表者
安部　哲哉（Abe, Tetsuya）

立命館大学・理工学部・嘱託講師

研究者番号：００６１４００９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：論文「Ribbon disks with the same exterior」を雑誌「Communications in Analysis and Geometry」に投稿し、無事アクセプトされた。論文の内容は、外部が等しいスライス円盤の無限系列を構成するというものである。構成のアイデアは、アニュラスツイストという方法である。
田神慶士氏との共同研究において、論文執筆中である。ファイバー結び目に対して定義される拡張されたミルナー数をd3不変量から計算するという結果である。結び目理論においても、d3不変量やLefschetzファイバー空間の理論が有効であることを示す一つの研究である。

研究成果の概要（英文）：We wrote the paper " Ribbon disks with the same exterior " and submitted to "Communications in Analysis and Geometry", and it was accepted.In this paper, we constructed infinitely many ribbon disks whose exteriors are the same. The idea to construct is to use annulus twists. Also, we are writing a paper on the enhanced Milnor number with Keiji Tagami.

研究分野：低次元トポロジー（特に結び目理論）

キーワード：スライス・リボン予想　4次元多様体　ハンドル分解　コンタクト構造　結び目理論　力学系

１．研究開始当初の背景

1960 年代に、Fox と Milnor は(多様体のコボルディズム群のアナロジーとして)結び目コンコーダンス群を導入しました。

この群の構造を解明する事は、結び目理論、特に、結び目コンコーダンス理論の基本的な課題です。

以下では、結び目コンコーダンス群の定義を説明します。

その後で、報告者の研究テーマである「スライス・リボン予想」について、結び目コンコーダンス群の観点から説明します。

以下では、滑らかなカテゴリーで考えます。結び目コンコーダンス群の定義をする前に、「結び目コンコーダント」と呼ばれる(結び目全体の集合上の)同値関係の説明から始めます。

3 次元球面 S^3 内の結び目 K_0 と K_1 が与えられたとします。

まず、S^3 の自明なコボルディズム

$S^3\times[0,1]$

を考えます。次に、K_0 を(S^3 ではなく)$S^3\times\{0\}$ 内の結び目、K_1 を(S^3 ではなく)$S^3\times\{1\}$ 内の結び目とみなします。

この設定の下、結び目 K_0 と K_1 が結び目コンコーダントとは、結び目 K_0 と K_1 が $S^3\times[0,1]$ の中でアニュラスで結ばれるときに言います。

結び目コンコーダントは(結び目全体の集合上の)同値関係になります。

結び目コンコーダンス群は、結び目全体をコンコーダントで割った集合に(結び目の連結和を用いて)アーベル群の構造を入れたものです。

近年、新しい結び目コンコーダンス不変量が(Khovanov homology 理論や Heegaard Floer homology 理論を経由して)導入され、アメリカ東部を中心として、結び目コンコーダンス群(や関連するテーマ)が盛んに研究されています。

一方、日本では、結び目コンコーダンス理論の研究が非常に盛ん、というわけではありません。そこで、報告者と丹下氏(筑波大学)は、日本の結び目コンコーダンス理論を盛り上げるために、研究集会「Mini-workshop on knot concordance」を開催しました。(日時:2013 月 9 月 17 日~20 日、場所:東京工業大学、補足:韓国から 3 人の講演者を招きました。)

上述の研究集会のテーマは(結び目コンコーダンス不変量、及び)報告者が研究している「スライス・リボン予想」でした。

(何度も説明抜きに言及してきた)「スライス・リボン予想」とは、結び目コンコーダンス群の単位元(の代表元)に関する、とある予想の事です。ここでは、結び目コンコーダンス群に言及しない定式化を説明します。

まず 4 次元球体 B^4 を考え、以下では B^4 の境界 ∂B^4 と S^3 を同一視します。スライス・リボン予想とは

S^3 内の結び目 K が B^4 で円板を張るとき、結び目 K は B^4 でリボン円板も張るだろう

という予想です。リボン円板は、微分幾何学的に言うと(極小曲面のように)ある種の極小性を持つ B^4 に埋め込まれた円板のことです。(リボン円板の定義は、研究計画・方法で述べます。)

・ スライス・リボン予想に関する先行研究

近年、Heegaard Floer homology 理論のおかげで「よく知られた結び目のクラスに対して、スライス・リボン予想は正しい事」が証明されました(Heegaard Floer homology に由来する不変量を用いて「S^3 内の特定の結び目は、4 次元球体 B^4 で円板を張らない事」が示されました。)

一方で、2010 年に、スライス・リボン予想の(信憑性のある)反例候補が構成されました。

ここで スライス・リボン予想の反例候補とは、4 次元球体 B^4 で(非自明な形で)円板を張る S^3 内の結び目のことです。

それらの結び目は、リボン円板を張らない可能性があるという意味で、スライス・リボン予想の反例になり得る、という事です。

上述の研究に引き続き、報告書と丹下氏(筑波大学)は、プレプリント１において、スライス・リボン予想の反例候補を(容易にしかも大量に)作る技術を確立しました。

そこでは「アニュラスツイスト」と呼ばれる結び目改変操作を用いました。

今後の課題は、これらの反例候補がスライス・リボン予想の反例なのか、どうかを確定させることです。

· リボン円板とハンドル分解

スライス・リボン予想の反例候補の構成で共通しているのは、B^4 の「複雑な」ハンドル分解から、2 次元円板の埋め込みが構成されているという点です。

この事実より、喫緊の課題は、ハンドル分解(特に Kirby 図式)の観点からリボン円板がどのように記述されるのかを解明する事、と言えます。

上述の研究が重要な理由は二つあります。一つ目の理由は、スライス・リボン予想の研究がどのように進展したとしても、上述の研究がスライス・リボン予想の研究の理論基礎となるからです。

もう一つの理由は、リボン円板の(ハンドル分解、特に Kirby 図式を用いた)記述が明確になることで、(従来とは違う方向の)新たな応用が期待できるからです。

· スライス・リボン予想の二つの帰結

(スライス・リボン予想の真偽はともかく)報告者と田神氏(東工大)は、論文 1 において、スライス・リボン予想の帰結を二つ示しました。

一つ目の帰結は、もしスライス・リボン予想が正しいならば(デーン手術と結び目コンコーダンスに関する)Akbulut 予想に反例が存在する、というものです。

その後(私達の結果を聞いた)安井氏(広島大学)が Akbulut 予想の反例を与えました。

反例の構成では、 4 次元多様体論の手法が用いられました。この結果により、結び目コンコーダンス理論と 4 次元多様体論の関係は深まり、また、スライス・リボン予想の信憑性が増しました。

もう一つの帰結は、スライス・リボン予想が正しければ、素なタイト結び目全体が(結び目コンコーダンス群の中で)線形独立になる、というものです。

この定理 は(結び目コンコーダンス群の単位元の性質に関する)スライス・リボン予想が、結び目コンコーダンス群全体の構造に強い制限を与える、というものです。この定理の主張は(見かけ上、弱い形では)

スライス・リボン予想が正しい時、タイト結び目 K_0 と K_1 がコンコーダントならば $K_0 = K_1$

となります。今後の課題は、スライス・リボン予想の研究において、何故、接触幾何学に関係するもの(つまり S^3 のタイト接触構造)が登場したのか、を解明することです。

また、上の主張を証明する枠組みを構築することです。

上述の研究は、結び目コンコーダンス理論と接触幾何学に新しい橋をかける可能性があり、研究が完成したときのインパクトは計り知れません。

２．研究の目的

本研究の目的は二つあります。

一つ目の目的は、結び目理論に於ける、長年の懸案の問題である「スライス・リボン予想」を解決することです。より正確には、「スライス・リボン予想」の解決に向けて 数学的ツールを整備することです。

二つ目の目的は、近年、盛んに研究されている「接触幾何学」や「シンプレクティック幾何学」が、結び目理論(特に結び目コンコーダンス理論)に於いて、どのような役割を果たすのかを解明することです。

３．研究の方法

ハンドル分解の理論を用いました。特に 4 次元球体のハンドル分解を用いました。

４．研究成果

論文「Ribbon disks with the same exterior」を雑誌「Communications in Analysis and Geometry」に投稿し、アクセプトされました。

論文の内容は、外部が等しいスライス円盤の無限系列を構成するというものです。

構成のアイデアは、アニュラスツイストという方法です。

Akbulut の指摘により、リボン円盤の例を追加しました。

田神慶士氏との共同研究において、論文執筆中です。

ファイバー結び目に対して定義される拡張されたミルナー数を d3 不変量から計算するという結果です。

結び目理論においても、d3 不変量やLefschetz ファイバー空間の理論が有効であることを示す一つの研究であります。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　　1 件）

1． T.Abe and M. Tange, Ribbon disks with the same exterior, to appear in Communications in Analysis and Geometry, 2018 査読有.

〔学会発表〕（計　　2 件）

６．研究組織
(1)研究代表者

安部 哲哉（Abe, Tetsuya）
立命館大学・理工学部・嘱託講師
研究者番号：00614009