様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：３２６１３
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ１７５９９

研究課題名（和文）標準束に対する正値性の退化と標準計量及び測度の関係

研究課題名（英文）relations between degeneration of positivity for the canonical bundle and canonical metrics or measures

研究代表者

菊田　伸（Kikuta, Shin）

工学院大学・教育推進機構（公私立大学の部局等）・准教授

研究者番号：４０７３６７９０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究において，準射影代数多様体上の負のリッチ曲率を持つ概完備ケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動に関し，2つの予想「体積形式内の対数項の冪に境界の小平次元が現れる」，「留数と境界の一般化ケーラー・アインシュタイン計量が一致する」を見出し，その解決を目指した．
実際に最大小平次元の場合は完全に解決した．ゼロ小平次元の場合は体積形式を決定でき，更に境界がアーベル多様体の時は，適切に拡大した留数はリッチ平坦ケーラー計量となることを明らかにした．そして中間小平次元の場合では，(対数版の)具体例である2次元ジーゲルモジュラー多様体のトロイダルコンパクト化において両方を確認した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究の成果は，有限型のリーマン面に対する古典的事実「対数的標準束の豊富性と，各穴においてカスプ特異点を持つガウス曲率が-1の完備リーマン計量の存在は同値である」を高次元化している．ただし高次元の場合は，豊富性が境界上で退化する状況が起こり，境界近くでの計量の振る舞いを具体的に描写することは困難であるが，いくつかの状況で克服した．更に，豊富性の境界における退化度(小平次元，一般化ケーラー・アンシュタイン計量)とケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動(体積増大度，留数)の関係まで明らかにしたため，代数幾何的性質とリーマン幾何的性質の間に新しい対応を発見できる可能性がある．

研究成果の概要（英文）：In this project, we proposed and aimed to solve two conjectures about a boundary behavior of the almost-complete Kahler-Einstein metric of negative Ricci curvature over quasi-projective manifolds. One conjecture states that as a power of a logarithmic term in the volume form the Kodaira dimension of the boundary appears. The other states that the residue along the boundary coincides with the generalized Kahler-Einstein metric.
In fact, we affirmatively solved both of them in the case of maximal Kodaira dimension. In the case of zero Kodaira dimension, we completely described the volume form, and when the boundary is additionally an abelian variety, it was discovered that a suitably expanded residue becomes the Ricci-flat Kahler metric. Furthermore, we confirmed that a toroidal compactification of the 2-dimensional Siegel modular variety provides a supporting example for the conjectures in the (logarithmic) case of intermediate Kodaira dimension.

研究分野：複素微分幾何学

キーワード：リッチ曲率が負のケーラー・アインシュタイン計量　対数的標準束に対する正値性の退化　非有界幾何　体積増大度　留数　小平次元　一般化されたケーラー・アインシュタイン計量　トロイダルコンパクト化

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

負のリッチ曲率を持つケーラー・アインシュタイン計量に関して，コンパクトな複素代数多様体上においてはT. AubinとS. - T. Yauによって，その存在という微分幾何的条件と，標準束の豊富性という代数幾何的条件が同値であることが示されている(カラビ予想の解決). その際にS. - T. Yauは複素モンジュ・アンペール方程式の解析的理論を構築・展開した．その後，その計量はH. D. Caoによってケーラー・リッチ流の時間無限大の極限としても得られた．これらの一般化として非コンパクトな場合が自然に考察された. 特に準射影代数多様体に対してこの存在定理が小林(亮), 辻, Tian - Yau, 板東らによって拡張され, 概完備ケーラー・アインシュタイン計量の存在が得られた. この場合は対数的標準束の境界外での豊富性の仮定が必要であり, その豊富性の境界上での退化と計量の性質が関係していることが期待されるが, ほとんど解明されていない. 更に, この計量のスペクトルなどの幾何学的データを抽出するには，無限遠での記述が必須である．しかし，豊富性が境界において退化する高次元特有の状況では，有界幾何でない状況も起こりうるため，境界近くでの振る舞いを具体的に描写することは困難である．

これらの課題について非退化な場合は，小林(亮)とG. Schumacherによって境界挙動が探究され，成功を収めている．特に大域的な体積増大度を決定し，また留数(境界に平行な方向に沿った計量の境界に近づけた極限)が境界上のリッチ曲率が負のケーラー・アインシュタイン計量になることを示した．　その後，代表者はこの結果を一般型境界の場合に拡張し，留数は辻，Song - Tianによって定義された特異ケーラー・アインシュタイン計量になることを得た．また複素曲面においては，小林(亮)によって境界が楕円曲線の場合に詳細に考察され，大域的な体積増大度や留数が具体的に記述されている．

２．研究の目的

本研究の目的は，準射影代数多様体上において，対数的標準束に対する豊富性の境界上での退化という観点で，リッチ曲率が負の概完備ケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動を解析することである．対数的標準束が半豊富ならば，対数的標準束から定まる多重対数的標準写像は内部を一切変化せず，境界因子のみ標準モデルと呼ばれる低次元の特異多様体に潰す．故に，境界挙動は標準モデルへ近づけることと等価であり，例えば，その次元である小平次元は体積増大度などに影響を与えると推測できる．このようなラフな描写を精細にし，豊富性の境界における退化度とケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動の関係を完全に明らかにしたい．それが可能ならば，代数幾何的性質とリーマン幾何的性質の間に新しい対応が発見できたことになる．具体的には，体積形式に現れる対数項の冪と境界の小平次元の間の公式，留数と境界の(辻とSong-Tianの意味での)一般化ケーラー・アンシュタイン計量もしくはヴェイユ・ピターソン計量の間の公式を見出すことを目論んでいる．

３．研究の方法

一般にケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動を決定するためには，対応する複素モンジュ・アンペール方程式の解について，境界の近くでの適切な評価を得る必要がある．また非コンパクトな設定での方程式の解析には，計量が満たすと推測される特徴を兼ね備えた適切な参考計量を構成することがポイントになる．そして，その参考計量から定まる関数空間やその上のフェファーマン作用素を用いて，参考計量とケーラー・アインシュタイン計量を比較する．

この方法はG. Schumacherによって適応され，Griffiths-Carlson 構成による参考計量を用い，非退化の場合の結果を生んでいる．この場合，参考計量が有界幾何であるため，S.- T. Yauの

議論に沿って上で述べた方法が機能する．しかし退化した場合は，類似の参考計量は非有界幾何である可能性があるため，有効な手法が開発されおらず，方程式の解析が非常に難しい．
その一方で，半豊富な標準束を持つコンパクト多様体上のケーラー・リッチ流の時間無限大の挙動と，本研究の境界挙動(留数をとる極限)には類似性があると推察している．実際に，代表者はこの推察を通して一般型境界の場合に体積増大度と留数の公式を証明している．幸いなことに,ケーラー・リッチ流の時間無限大の挙動に関しては，Tosatti-Weinkove-Yang，Tosatti-Zhangによって連続な収束や，飯高ファイブレーションのカラビ・ヤオ ファイバー上でリスケール計量の滑らかな収束が得られている．代表者は彼らに展開された解析の手法が，本研究の境界挙動においても力を発揮する可能性を信じ，この課題に適用することを考えている．
また，具体的な例を計算することによって，退化度と境界挙動の関係を見出し，一般の場合に解決する糸口を見つけることを目論んでいる．本研究の具体例を供給するのが，複素双曲多様体やジーゲルモジュラー多様体などの局所対称空間のD. Mumfordによるトロイダルコンパクト化である．この場合のケーラー・アインシュタイン計量は誘導されたベルグマン計量であり，境界近くで明示的に表記できる可能性が高く，実際，D. Mumfordによって体積形式がある程度具体的に記述された.複素双曲多様体の場合は，境界がアーベル多様体で，N. Mokは更に緻密な計算を行った．またジーゲルモジュラー多様体については，境界が中間小平次元に対応する状況になり，W. WangやYau-Zhangによって扇の情報を用いて組み合わせ的に表示が与えられた．

４．研究成果
本研究目的である「n次元準射影代数多様体上の概完備ケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動と対数的標準束の正値性の境界における退化の関係」を決定するため，上述の方法で研究に取り組み，付随する問題を解決した．成果は大まかに分けると次の4つである．
(1) 「体積増大度の公式」と「留数の公式」を退化の場合に定式化 ：
小林(亮)とG. Schumacherは正値性が非退化の場合に体積形式と留数を計算し，「体積増大度の公式」と「留数の公式」を得た．これらの公式は退化している場合にはどう拡張されるべきかを考察し,既存の結果や具体例から着想を得て,次の形の予想として提唱した．
[体積増大度の予想] 境界の小平次元がkであることと，体積形式の対数項の冪が$n+1-k$であることは同値である
[留数の予想] 計量の留数と境界の一般化されたケーラー・アインシュタイン計量は一致する
[留数の予想（カラビ・ヤオ境界の場合)] 計量に対数項をかけてリスケールした留数と，境界の(法束の双対に対応する)カラビ・ヤオ計量は一致する
実際に，小林(亮)とG. Schumacherの非退化の場合の公式はこれらの予想と同じである．更に，退化した場合については，境界が楕円曲線である複素曲面のときの小林(亮)の結果，N. Mokによる複素双曲多様体のトロイダルコンパクト化の場合の計算，そして代表者の一般型境界の場合の結果，は全てこれらの予想の正しさを示唆している．
(2) 境界が一般型であることの体積増大度による特徴付け ：
$k=n-1$の場合の[体積増大度の予想]において，「体積形式の対数項の冪が2なら境界の小平次元が$n-1$である」を証明した．Di Cerbo-Di Cerboは，豊富性が境界で非退化という代数幾何的条件を，計量がカスプ特異点を持ち，平行な方向には非退化であるという微

分幾何的条件で特徴付けていた．代表者は，ケーラー・アインシュタイン計量を考える上では体積形式の増大度の条件の方がより自然であると考え，この主張の形に彼らの結果を定式化し直し，証明を与えた．体積形式に対する仮定の等式にポテンシャル論におけるリース分解定理を応用することで，境界上の複素モンジュ・アンペール方程式の劣解となる体積形式を見出したことが証明の核となった．更にS. Boucksomによる線束に対する体積のカレント表示を組み合わせることで主張を得た.

(3) 境界がカラビ・ヤオまたはアーベル多様体の場合の体積増大度と留数 ：
$k = 0$の場合の[体積増大度の予想]における「境界の小平次元が0ならば体積形式の対数項の冪が$n + 1$である」を証明した．更に，複素双曲多様体のトロイダルコンパクト化とは限らないが，境界がアーベル多様体の有限商である場合に[留数の予想（カラビ・ヤオ境界の場合)]を確かめた．境界がアーベル多様体となる典型例が複素双曲多様体のトロイダルコンパクト化である．この多様体に対しては，N. Mokは複素球体から誘導されたポアンカレ・ベルグマン計量の体積形式と(直接言及はないが)リスケールした留数の緻密な計算を行った．上述の成果は，この体積増大度の公式を一般のカラビ・ヤオ境界の場合に拡張し，また境界がアーベル多様体の有限商である場合にリスケールした留数の公式を一般化したものである．これらの状況で法束は負であるのでグラウエルトの定理から，境界の近傍は法束の零セクションの近傍と同一視できる．その構造とカラビ・ヤオ構造を用いて，負のリッチ曲率を持つケーラー・アインシュタイン計量が境界の近傍で構成できる.更にコーシー・リーマン方程式に対する評価式を駆使して，その計量を完備ケーラー計量として全体に拡張する．これを参考計量とみなすと，対応する複素モンジュ・アンペール方程式の解の0階評価を得ることができ，それを足がかりに体積増大度の公式の証明を生み出すことに成功した．また，参考計量の曲率を具体的に計算することで,有界幾何であることと，境界がアーベル多様体の有限商であることの同値性を確認できた．これを根拠に，アーベル多様体の有限商の場合に，D. Wuの境界挙動の解析手法を真似ることができ，ケーラー・アインシュタイン計量と参考計量が境界において任意の位数で一致することを示した．その結果，留数の公式を得た．

(4) 2次元ジーゲルモジュラー多様体のトロイダルコンパクト化に対する体積増大度と留数 ：
2次元ジーゲルモジュラー多様体のトロイダルコンパクト化に対して，[体積増大度の予想]，[留数の予想]を確認し，中間小平次元の場合の予想が正しいことを保証できた．このとき，ジーゲル上半平面から誘導されたベルグマン計量がケーラー・アインシュタイン計量であり,一般的にはW. Wang，Yau-Zhang，対馬らによって，我々の目的とは別に体積形式が具体的に計算された．しかし，境界因子は正定値対称行列の成す開錐の多面錐による分解(扇)によって定義され，その組み合わせ的情報が大変複雑に表示に現れ，上述の予想の確認には不十分であった．そこで主合同部分群の商として得られる2次元のジーゲルモジュラー多様体に対する(井草，Legendreらによる)中心錐分解に関するコンパクト化において，議論を推し進め，体積形式内のエルミート計量などの表記を更に明確にした．そしてその結果，予想の両方を確かめることができた．ただしこの場合は，境界因子が単純交差しており，もともと想定していた滑らかな状況よりも複雑だったため，対数的な状況に拡張して考える必要があった．例えば，境界成分はモジュラー曲面であるため，対数的でないと中間小平次元ではない．よって一般化ケーラー・アインシュタイン計量は底空間であるモジュラー曲線上のポアンカレ計量に取り替えるなどして，予想も定式化し直した．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計12件（うち招待講演　12件／うち国際学会　5件）

１．発表者名 菊田 伸
２．発表標題 準射影代数多様体上のケーラー・アインシュタイン計量の留数について
３．学会等名 福岡大学微分幾何セミナー（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 Shin Kikuta
２．発表標題 Boundary behavior of K\"ahler-Einstein metric and positivity for log-canonical bundle
３．学会等名 The 27th International Conference on Finite and Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 菊田伸
２．発表標題 Boundary behavior of K\"ahler-Einstein metric of negative Ricci curvature over quasi-projective manifolds with Calabi-Yau boundary
３．学会等名 第三回宮崎幾何セミナー（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Shin Kikuta
２．発表標題 Degeneration of positivity for log-canonical bundle and boundary behavior of K\"ahler-Einstein metric
３．学会等名 The 24th Symposium on Complex Geometry（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Shin Kikuta
２．発表標題 Degeneration of positivity for log-canonical bundle and boundary behavior of K\"ahler-Einstein metric
３．学会等名 Stabilities in K\"ahler geometry and related topics（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 菊田伸
２．発表標題 Volume growth of K\"ahler-Einstein metric of negative Ricci curvature over quasi-projective manifolds
３．学会等名 測地線及び関連する諸問題（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 菊田伸
２．発表標題 Volume growth of K\"ahler-Einstein metric and positivity of log-canonical bundle
３．学会等名 農工大数学セミナー2019（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Shin Kikuta
２．発表標題 Degeneration of positivity for log-canonical bundle and K\"ahler-Einstein metric
３．学会等名 Young Mathematicians Workshop on Several Complex Variables and Complex Geometry 2017（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2017年

1．発表者名 Shin Kikuta
2．発表標題 Degeneration of positivity for log-canonical bundle and K\"ahler-Einstein metric
3．学会等名 Positivity concepts on holomorphic line bundles and theories on canonical K\"ahler metrics（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 菊田 伸
2．発表標題 対数的標準束の正値性と完備ケーラー・アインシュタイン計量の体積増大度
3．学会等名 東京理科大学 理工学部 談話会（招待講演）
4．発表年 2016年

1．発表者名 菊田 伸
2．発表標題 対数的標準束の正値性の退化と完備ケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動
3．学会等名 東京大学　複素解析幾何セミナー（招待講演）
4．発表年 2016年

1．発表者名 菊田 伸
2．発表標題 一般型境界を持つ準射影代数多様体上における完備ケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動
3．学会等名 首都大学東京 幾何学セミナー（招待講演）
4．発表年 2016年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考